

QED, QCD en pratique

P. Aurenche^a, J.-Ph. Guillet^b, E. Pilon^c

*LAPTh, Univ. Grenoble Alpes, Univ. Savoie Mont Blanc, CNRS,
74940 Annecy Cedex, France*

Résumé

Ces notes sont une introduction à l'application de l'électrodynamique quantique (QED) et de la chromodynamique quantique (QCD) aux réactions de diffusion aux hautes énergies. Le premier thème abordé est celui des divergences ultraviolettes et de la renormalisation à une boucle, avec comme conséquence pour QCD la liberté asymptotique. Le deuxième thème est celui des divergences infrarouges et colinéaires qui dans QCD sont traitées dans le cadre du modèle des partons avec l'introduction des fonctions de structure d'un hadron. On montre comment la violation d'invariance d'échelle est engendrée par les corrections radiatives et on discute le théorème de factorisation dans l'approximation à une boucle. Plusieurs applications phénoménologiques dans les collisions e^+e^- , $e p$ et $p p$ sont présentées, avec notamment la production de bosons de jauge, de gerbes hadroniques ("jets") et de particules à grande impulsion transverse dans les collisionneurs hadroniques. Dans tous les cas les prédictions sont confrontées avec les résultats expérimentaux récents.

^a aurenche@lapth.cnrs.fr

^b guillet@lapth.cnrs.fr

^c pilon@lapth.cnrs.fr

Avertissement

Les notes qui suivent donnent suffisamment de détails pour qu'un étudiant qui ne bénéficie pas d'un environnement académique très fourni en théorie quantique des champs ni en physique des particules puisse y trouver un intérêt. Ces notes supposent la connaissance du spineur de Dirac ainsi que celle de la procédure de construction de l'approche perturbative pour le calcul d'une amplitude de diffusion en théorie quantique des champs.

Ce cours est aussi disponible à l'URL suivante : https://lectures.lapth.cnrs.fr/qed_qcd. Sur ce site, le cours est divisé en quatorze parties, chaque partie a sa table des matières et comporte un lien vers un fichier pdf téléchargeable ; à chaque fichier pdf est associée la date de la dernière modification pour permettre au lecteur de connaître les fichiers qui ont été modifiés ou ajoutés. Certaines parties ont été enrichies par des fichiers pdf supplémentaires (compléments de cours, exercices) non inclus dans le fichier pdf global.

Nous conseillons au lecteur d'utiliser le site web pour consulter ce cours car ce mode de publication nous donne plus de souplesse pour le faire évoluer soit en corrigeant les incontournables typos, soit en ajoutant des exercices, applications ou compléments de cours.

Table des matières

1	Introduction	7
2	Lagrangien QED, Règles de Feynman	13
2.1	Invariance de jauge et le Lagrangien QED	13
2.2	Le spineur de Dirac libre	17
2.3	Le propagateur du fermion	23
2.4	Le champ du photon libre	28
2.5	Le propagateur du photon	34
2.5.1	Remarques sur le propagateur du photon	36
2.5.2	Indépendance de jauge et conservation du courant	37
2.6	Règles de Feynman de QED	38
2.7	Appendice : propriétés des matrices γ^μ	40
3	Divergences ultraviolettes, renormalisation	43
3.1	Divergences ultraviolettes et renormalisation en $\lambda\phi^4$	45
3.1.1	Divergences des diagrammes en boucle	45
3.1.2	Principes de la procédure de renormalisation	48
3.1.3	Renormalisation de la masse et de la fonction d'onde	51
3.1.4	Conséquence de la procédure de renormalisation : couplage mobile	55
3.1.5	Discussion	56
3.2	Techniques de calcul des diagrammes en boucle.	57
3.2.1	Paramétrage de Feynman.	58
3.2.2	Rotation de Wick.	60
3.2.3	Intégrales en régularisation dimensionnelle.	60
3.2.4	Analyse dimensionnelle	64
3.2.5	Règles de Feynman pour QED	64
3.2.6	Diracologie en n -dimensions.	65
3.3	Renormalisation du modèle $\lambda\phi^4$ à une boucle	65
4	Renormalisation de QED à une boucle	67
4.1	Polarisation du vide : calcul de Z_3	68
4.1.1	Conséquence et application	71
4.2	Self-énergie du fermion : calcul de Z_0 et Z_2	75
4.3	Correction au vertex : calcul de Z_1	83

4.3.1	Correction au vertex : calcul complet	84
4.3.2	Moment magnétique anomal de l'électron, du muon et application	87
4.4	Renormalisation : la fonction $\beta(\alpha)$ et le couplage mobile	89
4.5	Identités de Ward-Takahashi	92
4.6	Degré superficiel de divergence d'un diagramme	95
5	Compensation des divergences infrarouges	99
5.1	Terme de Born	99
5.2	Corrections virtuelles	100
5.3	Corrections réelles	102
5.4	Définition de la section efficace	104
6	Hadrons et quarks + ...	107
6.1	Spectroscopie et modèle des quarks	108
6.2	La diffusion profondément inélastique (DIS).	116
6.2.1	Cinématique de la diffusion lepton-nucléon	117
6.2.2	Dynamique	118
6.2.3	Résultats de l'expérience	120
6.3	Le modèle des partons dans l'inélastique profond	122
6.3.1	Section efficace électron-parton	124
6.3.2	Section efficace électron-proton	125
6.3.3	Identification partons \equiv quarks +	126
6.4	Diffusion neutrino-nucléon et modèle des partons	128
6.4.1	Diffusion neutrino-nucléon : courant chargé	128
6.4.2	Modèle des partons	131
6.4.3	Discussion	133
6.4.4	Règles de somme	133
6.5	Application du modèle des partons	134
6.6	Le modèle des partons : formulation générale	135
6.7	Conclusions	137
7	Chromodynamique Quantique : QCD	141
7.1	Lagrangien QCD	141
7.2	Quantification : théorie scalaire	146
7.3	Quantification : chromodynamique quantique	151
7.4	Règles de Feynman en QCD	157
7.5	Invariance BRS-T : Becchi-Rouet-Stora et Tyutin	163
7.6	Exemples de processus en arbre	165
7.7	Hadrons et quarks colorés	173
7.8	Appendice I : Résumé des règles de Feynman en QCD	173
7.9	Appendice II : Facteurs de couleur pour SU(N)	175

8	Chromodynamique Quantique : Renormalisation à une boucle	177
8.1	Introduction	177
8.2	Calcul des Z_i	180
8.2.1	Calcul de Z_2	180
8.2.2	Calcul de Z_3	181
8.2.3	Calcul de Z_{1F}	185
8.2.4	Le couplage mobile α_s et application	189
8.2.5	Définition de Λ_{QCD}	190
8.2.6	Au-delà des logarithmes dominants	191
8.2.7	Résultats	192
9	Violations de l'invariance d'échelle	195
9.1	Violations d'invariance d'échelle : les logarithmes dominants	198
9.1.1	Terme de Born	198
9.1.2	Corrections radiatives d'ordre α_s : violation de l'invariance d'échelle	200
9.1.3	Equations d'évolution de la distribution de quark : équation DGLAP	203
9.1.4	Solution de l'équation d'évolution par la méthode des moments.	204
9.1.5	Approche intuitive	206
9.1.6	Equations d'évolution couplées des quarks et des gluons	207
9.1.7	Stabilité de l'interprétation partonique : règles de somme	210
9.1.8	Phénoménologie	211
9.1.9	Conclusions	215
9.2	Violations d'invariance d'échelle : calcul exact	216
9.2.1	Calcul du terme de Born	216
9.2.2	Corrections d'ordre α_s : contribution de γ^* <i>quark</i> \rightarrow <i>gluon quark</i>	218
9.2.3	Corrections d'ordre α_s : contribution de γ^* <i>gluon</i> \rightarrow <i>quark antiquark</i>	221
9.2.4	Diffusion γ^* <i>proton</i> : contribution des termes réels	223
9.2.5	Corrections d'ordre α_s : contribution des termes virtuels	225
9.2.6	Diffusion γ^* <i>proton</i> au premier ordre de QCD	227
9.2.7	Schémas de factorisation et équation DGLAP	228
9.3	Diffusion Drell-Yan	230
9.3.1	Calcul du terme de Born	230
9.3.2	Corrections d'ordre α_s : contribution de <i>quark antiquark</i> \rightarrow γ^* <i>gluon</i>	231
9.3.3	Corrections d'ordre α_s : contribution de <i>quark gluon</i> \rightarrow γ^* <i>quark</i>	233
9.3.4	Corrections d'ordre α_s : contributions des termes virtuels	234
9.3.5	Diffusion Drell-Yan au premier ordre de QCD	235
10	Annihilation $e^+ e^- \rightarrow hadrons$	239
10.1	Section efficace totale	239
10.1.1	Corrections d'ordre α_s : termes virtuels	240
10.1.2	Corrections d'ordre α_s : termes réels	240
10.1.3	Taux de désintégration en hadrons	244
10.1.4	Compensation des divergences et généralisation	244
10.2	Production de gerbes hadroniques ou "jets"	246
10.3	Production inclusive d'un hadron	250

10.3.1	Corrections d'ordre α_s : termes virtuels	251
10.3.2	Corrections d'ordre α_s : termes réels	252
10.3.3	Corrections d'ordre α_s : production inclusive d'un hadron	254
11	Unitarité, règles de coupure	257
11.1	Matrice S, unitarité, théorème optique	257
11.2	Relations de dispersion	263
11.3	Diagrammes et unitarité : règles de coupure de Cutkosky	265
11.4	Règles de Cutkosky et compensation des divergences	268
12	Equations du groupe de renormalisation	271
12.1	Equations du groupe de renormalisation	272
12.2	Calcul de la fonction β et des dimensions anomales	273
12.3	Solution des équations du groupe de renormalisation	275
12.4	Applications	277
12.5	Comportement asymptotique des fonctions de Green	279
12.6	Comportement asymptotique du couplage mobile	280
12.7	Violation d'invariance d'échelle	281
13	Modèle des partons amélioré et applications.	283
13.1	Processus de Drell-Yan	283
13.2	Production de photons directs à grands transferts	290
13.3	Production de jets dans les collisions hadroniques	301
13.4	Production de hadrons dans les collisions hadroniques	308
13.5	Conclusion	311
14	Bibliographie	313

Chapitre 1

Introduction

Le cours qui va suivre est une introduction à la **chromodynamique quantique** qui est une des composante du **Modèle Standard** de la physique des particules. Le principe de base qui guide la construction de modèles en physique des particules est le **principe d'invariance de jauge locale** selon lequel la physique ne dépend pas de la phase que l'on peut associer aux champs de particules. Le Modèle Standard est un exemple particulier de théorie de jauge caractérisée par un certain **groupe de symétrie de jauge**. Le groupe de jauge qui sous-tend le Modèle Standard est

$$SU(3) \otimes SU(2)_L \otimes U_Y(1)$$

c'est-à-dire le produit direct de 3 groupes simples.

- Le groupe $SU(3)$ ou **groupe de couleur** est le groupe de symétrie des interactions fortes. Le groupe $SU(3)$ agit sur les quarks qui sont les constituants élémentaires de la matière et la force d'interaction entre les quarks est portée par les gluons qui sont les bosons de jauge du groupe de symétrie. On a donc **des quarks et gluons colorés**. Le paramètre qui caractérise la "force" de l'interaction entre quarks et gluons est dénoté α_s et il peut être, dans certaines conditions, ~ 1 (interactions fortes). Dans d'autres conditions que l'on spécifiera plus tard $\alpha_s < 1$. La symétrie $SU(3)$ de couleur est exacte et donc, nécessairement, les gluons sont de masse nulle.

- Le groupe $SU(2)_L \times U_Y(1)$ est le **groupe des interactions faibles et électromagnétiques** où $SU(2)_L$ est le groupe d'isospin et $U_Y(1)$ est le groupe d'hypercharge. A basse énergie ($M < 250$ GeV) la **symétrie est spontanément brisée** et le groupe de symétrie résiduel est $U_{EM}(1)$ dont le générateur est une combinaison du générateur de $U_Y(1)$ et d'un générateur de $SU(2)_L$. Le boson de jauge correspondant est évidemment le photon. Le couplage caractéristique est $\alpha \simeq \frac{1}{137}$. La brisure de symétrie implique que les autres bosons de jauge du groupe initial acquièrent une masse : ce sont les bosons W^\pm, Z découverts au CERN dans les années 1980. Le mécanisme de brisure est associé aux noms de **Brout, Englert, Guralnik, Hagen, Higgs, Kibble** mais il est dit "**mécanisme de Brout-Englert-Higgs** du nom des trois premiers auteurs par ordre chronologique. Il est responsable de l'existence de la "goddamned particle"¹ de Higgs, annoncée au CERN

1. Due à Leon Lederman cette expression a été déformée par des journalistes américains imbéciles en "God's particle" pour être "politiquement correcte". Cette dernière forme a ensuite été reprise par le suiviste troupeau de veaux de la presse internationale. Une traduction plus appropriée serait cette "p... de particule".

en décembre 2012 suite aux résultats expérimentaux des collaborations ATLAS et CMS.

Ce qui suit concerne le groupe de couleur et les interactions fortes, c'est-à-dire la **chromodynamique quantique (QCD)**. La problématique de **QCD** est assez différente de celle du modèle de **Glashow-Weinberg-Salam (GWS)** qui décrit les interactions électrofaibles : le couplage est relativement grand et quand on calcule une quantité physique en termes d'une série perturbative (dénotée symboliquement) :

$$\sigma = a_0 + a_1\alpha_s + a_2\alpha_s^2 + a_3\alpha_s^3 + \dots$$

les termes en α_s^n, \dots , jouent un rôle important. Une bonne partie du cours concernera donc le calcul des termes d'ordre supérieur et leurs conséquences phénoménologiques. Dans le modèle de **GWS** le couplage est petit (donc le rôle des corrections est moins crucial, bien que les corrections d'ordre supérieur soient maintenant absolument nécessaires pour l'interprétation des résultats expérimentaux) et l'aspect le plus intéressant sera la brisure de symétrie et le mécanisme par lequel non seulement les bosons, mais aussi les quarks acquièrent une masse et le boson de Higgs apparaît.

La Chromodynamique Quantique

QCD est la théorie qui est supposée décrire les hadrons ainsi que les interactions entre ces derniers c'est-à-dire les interactions fortes. Les problèmes qu'une théorie des interactions fortes doit résoudre sont de deux types :

1. — comprendre le spectre de masse des hadrons : $m_\pi, m_\rho, \dots, m_p, m_\Delta, \dots$;
— comprendre la durée de vie ("largeur" de désintégration) des hadrons :

$$\rho \rightarrow \pi\pi, \quad \omega \rightarrow \rho\pi, \quad \Delta \rightarrow p\pi, \dots$$

Ce sont des problèmes caractérisés par une échelle de masse $M \sim M_h \sim 1 \text{ GeV}$ ($m_\rho \sim .75 \text{ GeV}, m_p \sim .940 \text{ GeV}, m_\Delta \sim 1.23 \text{ GeV}, m_\pi \sim .14 \text{ GeV}$ est l'exception).

2. comprendre l'interaction entre les hadrons :

$$pp \rightarrow \text{hadrons}, \quad pp \rightarrow \gamma^*, W, Z + \text{hadrons}$$

et entre lepton et hadron :

$$ep \rightarrow e + \text{hadrons}, \quad ee \rightarrow \text{hadrons}$$

En plus de l'échelle M_h , ces processus sont caractérisés par l'échelle d'énergie de la collision : $M \sim \sqrt{s} = E_{CM}$.

La tendance a toujours été d'explorer des énergies de plus en plus grandes car, par la relation d'incertitude de Heisenberg $\Delta x \Delta p \sim \hbar$, cela revient à sonder la matière avec une résolution de plus en plus fine. En effet, on a²

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{\hbar c [\text{GeV fm}]}{c \Delta p [\text{GeV}]} \simeq \frac{.2 [\text{GeV fm}]}{c \Delta p [\text{GeV}]},$$

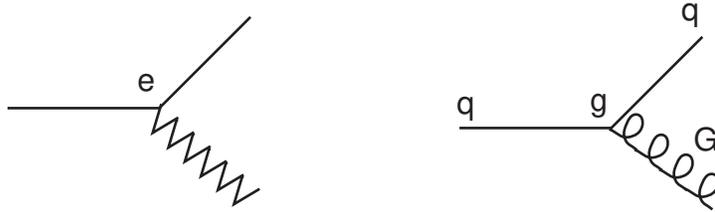
ce qui donne les ordres de grandeur suivants :

2. $\hbar = 6,58\,211\,928\,10^{-22} \text{ MeV s}$, $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$. Pour une liste des constantes fondamentales et de leur valeur voir : <http://pdg.lbl.gov/2014/reviews/rpp2014-rev-phys-constants.pdf>, in K.A. Olive *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014).

- LEP : $\Delta p \sim 200 \text{ GeV}/c \Rightarrow \Delta x \sim 10^{-3} \text{ fm} = 10^{-18} \text{ m}$
- LHC : $\Delta p \sim 2 \text{ TeV}/c \Rightarrow \Delta x \sim 10^{-4} \text{ fm} = 10^{-19} \text{ m}$

(L'énergie des collisions entre protons au LHC est de 14 TeV, mais l'énergie effective des collisions entre constituants est de l'ordre de 2 TeV). La physique des particules actuelle peut donc être qualifiée d'attophysique = (nano)²-physique.

En fait, les expériences à haute énergie ont depuis longtemps montré que les hadrons sont des objets composites, et qu'ils sont formés de constituants ponctuels aux échelles explorées : les quarks et les gluons. La QCD est la théorie qui décrit les interactions entre quarks et gluons, de même que l'électrodynamique quantique (QED) décrit l'interaction entre électrons et photons. La force de l'interaction est décrite par le couplage e pour QED et le couplage g pour QCD



avec en général $e \ll g$ ($\alpha = e^2/(4\pi\hbar c) \ll \alpha_s = g^2/(4\pi\hbar c)$). On verra par la suite (voir chapitres 3 et 8) que les corrections d'ordre supérieur et la renormalisation imposent $\alpha \rightarrow \alpha(M)$, $\alpha_s \rightarrow \alpha_s(M)$ où M est l'échelle caractéristique du processus étudié : $\alpha(M)$, $\alpha_s(M)$ sont appelés **couplage mobile** de QED et de QCD respectivement. Une différence fondamentale entre les deux est que, contrairement à QED, le couplage mobile en QCD décroît quand l'échelle de masse croît et il tend vers 0 aux énergies asymptotiques. On est donc amené à distinguer deux régimes en QCD :

1. $M \gg 1 \text{ GeV}$, $\alpha_s(M) \ll 1$: les quarks et gluons observés à l'intérieur des hadrons à cette échelle apparaissent quasi libres puisque α_s est petit. On pourra donc utiliser la théorie des perturbations :

$$\sigma \sim a_0 + a_1\alpha_s + a_2\alpha_s^2 + \dots$$

Les méthodes de calcul seront donc similaires à QED. C'est ce régime de **liberté asymptotique** que nous allons étudier. Il concerne l'interaction entre hadrons, et entre leptons et hadrons à haute énergie.

2. $M \leq 1 \text{ GeV}$, $\alpha_s(M) \geq 1$: l'interaction est tellement forte que les quarks et gluons sont confinés dans les hadrons. C'est donc un régime non perturbatif pour lequel il n'existe pas de méthodes de calcul analytique. Actuellement, ces problèmes sont abordés numériquement par le biais des théories de jauge sur réseau.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est intéressant de remarquer que la notion de "constituants élémentaires" des hadrons est apparue "indépendamment" dans les deux régimes :

- En 1964, Gell-Mann et Zweig proposent le "modèle des quarks" comme méthode de classification des très nombreuses résonances hadroniques que l'on découvrait expérimentalement ;
- En 1968, Feynman et Bjorken propose le "modèle des partons" qui permet de comprendre la propriété d'"invariance d'échelle" de la réaction "profondément inélastique"

$$e + p \rightarrow e + \text{hadrons}$$

étudiée expérimentalement au SLAC à haute énergie (pour l'époque!).

A priori, les partons de Feynman ne sont pas reliés aux "quarks" de Gell-Mann ou aux "as" de Zweig. Ce n'est qu'après de nombreux travaux théoriques et expérimentaux que l'on peut, dans une certaine mesure, identifier les partons de Feynman aux quarks et aux gluons de QCD (voir chap. 6).

En prélude à QCD on considère l'électrodynamique quantique qui permet d'illustrer de façon relativement simple de nombreux aspects de la chromodynamique quantique. Les premiers chapitres sont donc consacrés à QED. Le chapitre 1 résume la construction du Lagrangien de QED où le principe d'invariance de jauge joue un rôle fondamental. On dérive aussi succinctement les règles de Feynman. Le chapitre suivant traite de façon qualitative des **divergences ultraviolettes** qui apparaissent dans les calculs d'ordre supérieur en théorie des perturbations, divergences qui seront éliminées par la procédure de **renormalisation** : le concept de **couplage mobile**, qui dépend de l'échelle d'énergie du processus considéré, apparaît naturellement. Les outils techniques sont ensuite introduits et appliqués, dans le chapitre 3, à la renormalisation de QED à une boucle. Cela est suivi par un chapitre montrant comment les **divergences infrarouges** apparaissant dans le calcul des boucles sont éliminées quand l'observable est correctement défini.

Le chapitre 5 est une brève introduction au **modèle des partons** et sert de justification au fait que la physique des interactions entre hadrons et entre hadrons et leptons est ramenée à la discussion d'une théorie des interactions entre quarks et gluons et entre ces derniers et les leptons. La notion de **fonction de structure** d'un hadron, et de son **invariance d'échelle**, est présentée. Le lagrangien de QCD est ensuite construit sur la base de l'invariance de jauge non abélienne SU(3) et la théorie est quantifiée suivant l'approche des intégrales fonctionnelles. Les règles de Feynman sont obtenues et appliquées au calcul des amplitudes de diffusion $2 \text{ corps} \rightarrow 2 \text{ corps}$ (chapitre 6). Elles sont ensuite utilisées pour évaluer certains diagrammes en boucle qui permettent d'obtenir le couplage mobile de QCD et de prouver la **propriété de liberté asymptotique** de QCD (chapitre 7). Puis on considère le problème des **divergences colinéaires** qui sont liées au fait que les quarks et les gluons sont supposés être de masse nulle. La discussion est conduite dans le cadre du modèle des partons et, par une procédure reminiscente de la renormalisation, on peut éliminer ces divergences au prix de l'introduction de **violation de l'invariance d'échelle** : c'est le **théorème de factorisation** dans le modèle des partons. Les résultats du chapitre 8 justifient, en fait, l'usage du modèle des partons et de ses corrections QCD pour la description des interactions lepton-hadron et hadron-hadron : c'est l'**universalité des fonctions de structure** qui est "prouvée" par l'étude de la diffusion Drell-Yan. Le chapitre 9, sur le calcul de quelques observables de la diffusion $e^+ e^- \rightarrow \text{hadrons}$ est l'occasion de montrer comment sont traitées les divergences infrarouges et colinéaires en QCD et d'introduire le concept de **gerbe hadronique** ou **jet** et de **fonctions de fragmentation** des quarks et des gluons. Il est suivi d'une discussion sur l'**unitarité** qui définit la structure analytique de l'amplitude de diffusion dans le plan d'énergie complexe et sur les règles de coupure. Une brève introduction aux **relations de dispersion** est également donnée. Le chapitre 11 contient une introduction aux **équations du groupe de renormalisation**. Le chapitre 12 est consacré à quelques applications de QCD à la phénoménologie des collisions *proton-proton*.

Conventions

Dans la suite on utilisera les conventions habituelles $\hbar = c = 1$ de telle sorte que les variables d'énergie E , d'impulsion p et de masse m sont toutes exprimées en unité de masse et sont de dimension 1,

$$[E] = [p] = [m] = 1.$$

Par conséquent, d'après les relations de Heisenberg, $\Delta p \Delta x \sim 1$, $\Delta E \Delta t \sim 1$, les variables de longueur et de temps sont de dimension -1,

$$[x] = [t] = -1.$$

La métrique est définie par la matrice diagonale 4×4 :

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On note un quadrivecteur :

$$V^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3) = (v^0, v^i) = (v^0, \vec{v})$$

d'où :

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu = (v_0, v_1, v_2, v_3) = (v_0, v_i) = (v_0, -\vec{v})$$

On définit les opérateurs différentiels $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ et $\partial^\mu = \partial/\partial x_\mu$ et donc

$$\partial_\mu V^\mu = \partial_0 v^0 + \partial_i v^i = \partial_0 v^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \tag{1.0.1}$$

