

# Chapitre 10

## Annihilation $e^+ e^- \rightarrow hadrons$

On a déjà brièvement mentionné dans la section 6.5 la réaction  $e^+ e^- \rightarrow hadrons$  comme test du modèle des partons naïf. Dans ce chapitre on va étudier, au premier ordre en QCD, différents observables tels que la section efficace totale, la section efficace de production de "jet" et celle inclusive de production d'un hadron, ce qui nécessitera, dans les deux derniers cas, l'introduction d'une part de la notion d'algorithme de définition de "jet" ou gerbe hadronique et d'autre part de la fonction de fragmentation d'un parton en hadron. Dans tous les cas il s'agit de traiter les divergences infrarouges et colinéaires qui surgissent dans les étapes intermédiaires des calculs, soit par compensation complète entre diagrammes réels et virtuels (section totale, production de jet), soit par absorption des divergences colinéaires restantes dans une fonction de structure non perturbative (production inclusive d'un hadron). Pour simplifier les expressions, de façon similaire à DIS, on va discuter la désintégration d'un photon virtuel  $\gamma^* \rightarrow hadrons$  plutôt que  $e^+ e^- \rightarrow hadrons$  puisque la partie QCD est complètement découplée de la partie électromagnétique dans la mesure où on somme sur l'état de polarisation des particules initiales et finales.

Comme pour calculs précédents on trouve d'abord l'expression de la contribution à l'ordre le plus bas en  $n$ -dimensions puis celle au premier ordre en QCD. Les différents observables partagent tous la même dynamique (amplitude de diffusion) mais diffèrent par l'espace de phase final considéré.

### 10.1 Section efficace totale

L'élément de matrice à l'approximation de Born de la désintégration d'un photon virtuel en une paire quark-antiquark,  $\gamma^*(q) \rightarrow q(p_1) + \bar{q}(p_2)$ , est :

$$\mathcal{M}_{(0)} = -iee_q\mu^\varepsilon \bar{u}(p_1)_j \gamma_\nu v(p_2)_j \epsilon^\nu. \quad (10.1.1)$$

C'est évidemment le processus croisé de Drell-Yan éq. (9.3.125) où on a renversé le signe de toutes les impulsions. Le carré sommé sur les polarisations et les couleurs est donc (voir éq. (9.3.126))

$$\Sigma |\mathcal{M}_{(0)}|^2 = (ee_q\mu^\varepsilon)^2 4 \langle N \rangle (1 - \varepsilon) Q^2, \quad (10.1.2)$$

où  $q^2 = Q^2$  est la masse carrée du photon virtuel. Le facteur 4 concerne la polarisation des quarks. Par convention, en accord avec notre pratique dans le DIS, on a sommé sur la polarisation du

photon initial ( $\epsilon^\nu \epsilon^{\nu'} = -g^{\nu\nu'}$ ). L'espace de phase est (voir éqs. (9.2.73)) :

$$\begin{aligned}
 PS2 &= \int \frac{d^{n-1}p_1}{(2\pi)^{n-1}2\omega_1} \frac{d^{n-1}p_2}{(2\pi)^{n-1}2\omega_2} (2\pi)^n \delta^{(n)}(p_1 + p_2 - q) \\
 &= (2\pi)^{2-n} \int \frac{\omega_1^{n-3}}{2} d\omega_1 d\Omega_{1,n-2} \delta(Q^2 - 2\sqrt{Q^2} \omega_1) \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\pi^{3/2-\varepsilon}}{\Gamma(3/2-\varepsilon)} \left( \frac{16\pi^2}{Q^2} \right)^\varepsilon, \tag{10.1.3}
 \end{aligned}$$

où on a fait l'intégration angulaire grâce à l'éq. (3.2.15) et utilisé la notation habituelle  $n = 4 - 2\varepsilon$ . Combinant espace de phase et élément de matrice on trouve pour le taux de désintégration du photon en une saveur de quark :

$$\begin{aligned}
 e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) &= \frac{1}{2\sqrt{Q^2}} PS2 \Sigma |\mathcal{M}_{(0)}|^2 \\
 &= \langle N \rangle \frac{\alpha}{2\pi} e_q^2 \sqrt{Q^2} (1-\varepsilon) \frac{\pi^{3/2-\varepsilon}}{\Gamma(3/2-\varepsilon)} \left( \frac{16\pi^2 \mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon. \tag{10.1.4}
 \end{aligned}$$

On remarque que pour  $\varepsilon = 0$  l'expression devient très simple,  $\langle N \rangle \alpha e_q^2 \sqrt{Q^2}$  puisque  $\pi^{3/2}/\Gamma(3/2) = 2\pi^{3/2}/\Gamma(1/2) = 2\pi$  d'après l'éq. (3.2.19). On aurait presque pu l'écrire directement : le facteur  $\alpha e_q^2$  est évident de même que  $N$  qui compte le nombre d'états de couleur final et  $\sqrt{Q^2}$  qui est la seule variable dimensionnée qui donne la bonne dimension à la largeur de désintégration. Finalement, seule la normalisation (un facteur 1!) n'aurait pu être devinée.

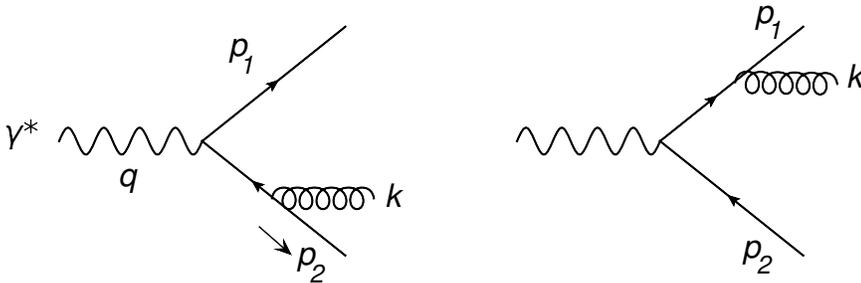
### 10.1.1 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : termes virtuels

Il est trivial d'obtenir la contribution des termes virtuels : ça sera le même terme multiplicatif à l'amplitude de Born que pour la production Drell-Yan ( $Q^2 > 0$ ), comme en éq. (9.3.151), où  $\mathcal{M}_{(0)}$  est maintenant donné par le terme d'ordre 0 de  $\gamma^* \rightarrow q + \bar{q}$ , éq. (10.1.2). Le double de l'interférence avec le terme de Born sera donc :

$$e_q^2 \Gamma_1^{\text{virtuel}}(Q^2, \varepsilon) = e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \langle c_F \rangle \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \right] \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 8 + 2\frac{\pi^2}{3} \right\}. \tag{10.1.5}$$

### 10.1.2 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : termes réels

Les diagrammes à considérer sont :



Pour obtenir directement le carré de l'amplitude des termes réels,  $\gamma^* \rightarrow q(p_1) + \bar{q}(p_2) + G(k)$  on peut partir de la diffusion  $q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow \gamma^*(q) + G(k)$ , éq. (9.3.134), et renverser le signe de toutes les impulsions sauf celle du gluon qui reste une particule finale :

$$\begin{aligned} p_1 \rightarrow -p_2 & ; \quad \hat{t} = (p_1 - k)^2 & \rightarrow \quad \hat{s}_2 = (p_2 + k)^2 = (q - p_1)^2 \\ p_2 \rightarrow -p_1 & ; \quad \hat{u} = (p_2 - k)^2 & \rightarrow \quad \hat{s}_1 = (p_1 + k)^2 = (q - p_2)^2 \\ q \rightarrow -q & ; \quad \hat{s} = (p_1 + p_2)^2 & \rightarrow \quad \hat{s}_3 = (p_1 + p_2)^2 = (q - k)^2, \end{aligned} \quad (10.1.6)$$

pour obtenir :

$$\Sigma |\mathcal{M}_{(1)}^{réel}|^2 = (ee_q \mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 < N_{CF} > 8(1 - \varepsilon) \left[ (1 - \varepsilon) \left( \frac{\hat{s}_1}{\hat{s}_2} + \frac{\hat{s}_2}{\hat{s}_1} \right) + 2 \frac{\hat{s}_3 q^2}{\hat{s}_1 \hat{s}_2} - 2\varepsilon \right], \quad (10.1.7)$$

où on a modifié de façon appropriée les facteurs de polarisation et de couleur.

### • Intégrale sur l'espace de phase

Dans tous les cas précédents l'espace de phase final comptait deux particules et les calculs étaient relativement faciles. Ici, pour obtenir la contribution des termes réels au taux de production hadronique il faut intégrer l'espace de phase à 3 corps en  $n$ -dimensions, soit évaluer :

$$PS3 \Sigma |\mathcal{M}_{(1)}^{réel}|^2 = \int \frac{d^{n-1}p_1}{(2\pi)^{n-1}2\omega_1} \frac{d^{n-1}p_2}{(2\pi)^{n-1}2\omega_2} \frac{d^{n-1}k}{(2\pi)^{n-1}2k} (2\pi)^n \delta^{(n)}(p_1 + p_2 + k - q) \Sigma |\mathcal{M}_{(1)}^{réel}|^2 \quad (10.1.8)$$

Pour cela on se place dans le repère au repos du photon virtuel,  $\vec{q} = 0$ , et on est libre de choisir l'axe  $Oz$  le long de l'impulsion finale  $p_1$  puisqu'il n'y a pas d'impulsion initiale privilégiée (car on a sommé sur les états de polarisation du photon). Tous les vecteurs du problème seront dans un plan, soit  $xOz$ , et on pourra ainsi faire trivialement l'intégrale sur tous les angles sauf sur l'angle (polaire)  $\theta_1$  entre  $\vec{p}_1$  et  $\vec{k}$ . C'est la seule variable angulaire dont dépend  $|\mathcal{M}_{(1)}^{réel}|^2$ . On a :

$$\hat{s}_1 = 2\omega_1 k (1 - \cos \theta_1) = Q^2 - 2\sqrt{Q^2} \omega_2 ; \quad \hat{s}_2 = Q^2 - 2\sqrt{Q^2} \omega_1 ; \quad \hat{s}_3 = Q^2 - 2\sqrt{Q^2} k. \quad (10.1.9)$$

Dans l'éq. (10.1.8) on peut se débarrasser de  $p_2$  en écrivant comme d'habitude :

$$\int \frac{d^{n-1}p_2}{2\omega_2} = \int d^n p_2 \delta^+(p_2^2), \quad (10.1.10)$$

et en effectuant cette intégrale avec la conservation d'énergie-impulsion  $\delta^{(n)}(p_1 + p_2 + k - q)$ . Tous les angles de  $p_1$  se font trivialement à l'aide de la relation (3.2.14) :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{n-1}p_1}{2\omega_1} &= \frac{1}{2} \int d\omega_1 \omega_1^{n-3} d\Omega_{1n-2} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int d\omega_1 \omega_1^{n-3} \end{aligned}$$

et de même pour les angles de  $k$ , sauf l'angle polaire  $\theta_1$  que l'on doit garder :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{n-1}k}{2k} &= \frac{1}{2} \int dk k^{n-3} d\theta_1 (\sin \theta_1)^{n-3} d\Omega_{n-3} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} \int dk k^{n-3} d\cos \theta_1 (1 - \cos^2 \theta_1)^{\frac{n-4}{2}}. \end{aligned}$$

L'espace des phases devient alors

$$\begin{aligned}
 PS3 &= \frac{1}{(2\pi)^{2n-3}} \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} \int d\omega_1 \omega_1^{n-3} dk k^{n-3} d\cos\theta_1 (1 - \cos^2\theta_1)^{\frac{n-4}{2}} \delta^+((q - p_1 - k)^2) \\
 &= \frac{\pi^{n-\frac{3}{2}}}{(2\pi)^{2n-3}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{n-2}{2})} \int d\omega_1 \omega_1^{n-3} dk k^{n-3} d\cos\theta_1 (1 - \cos^2\theta_1)^{\frac{n-4}{2}} \\
 &\quad \delta^+(Q^2 - 2(\omega_1 + k)\sqrt{Q^2} + 2\omega_1 k(1 - \cos\theta_1)), \tag{10.1.11}
 \end{aligned}$$

ce qui contraint l'angle polaire :

$$1 - \cos\theta_1 = -\frac{Q^2 - 2(\omega_1 + k)\sqrt{Q^2}}{2\omega_1 k}, \tag{10.1.12}$$

laissant finalement comme variable d'intégration les énergies  $\omega_1$  et  $k$ .

### • Cinématique

Les éqs. (10.1.9) impliquent les contraintes  $0 < \omega_1, \omega_2, k < \sqrt{Q^2}/2$ . Si on substitue par conservation d'énergie  $\omega_2 = \sqrt{Q^2} - \omega_1 - k$  on a alors les conditions  $\sqrt{Q^2} > \omega_1 + k > \sqrt{Q^2}/2$ . Il est pratique d'introduire les variables sans dimension  $z_i$  via :

$$k = \frac{\sqrt{Q^2}}{2} z, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{Q^2}}{2} z_1, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{Q^2}}{2} z_2 = \frac{\sqrt{Q^2}}{2} (2 - z - z_1), \tag{10.1.13}$$

le domaine de variation des  $z_i$  étant  $0 < z, z_1, z_2 < 1$  et  $2 > z + z_1 > 1$ . Les invariants et angles du problème s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \hat{s}_1 &= (p_1 + k)^2 = (q - p_2)^2 = Q^2(z + z_1 - 1), \\
 \hat{s}_2 &= (p_2 + k)^2 = (q - p_1)^2 = Q^2(1 - z_1), \\
 \hat{s}_3 &= (p_1 + p_2)^2 = (q - k)^2 = Q^2(1 - z), \\
 1 - \cos\theta_1 &= 2 \frac{z + z_1 - 1}{z z_1}, \quad 1 + \cos\theta_1 = 2 \frac{(1 - z)(1 - z_1)}{z z_1}. \tag{10.1.14}
 \end{aligned}$$

L'intégrale d'espace de phase (10.1.11) devient alors après intégration sur l'angle :

$$\begin{aligned}
 PS3 &= \frac{\pi^{n-\frac{3}{2}}}{(2\pi)^{2n-3}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{n-2}{2})} \int d\omega_1 \omega_1^{n-3} dk k^{n-3} (1 - \cos^2\theta_1)^{\frac{n-4}{2}} \frac{1}{2\omega_1 k} \\
 &= \left[ \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\pi^{3/2-\varepsilon}}{\Gamma(\frac{3}{2}-\varepsilon)} \left( \frac{16\pi^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \right] \frac{Q^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dz (1-z)^{-\varepsilon} \\
 &\quad \int_{1-z}^1 dz_1 (1-z_1)^{-\varepsilon} (z+z_1-1)^{-\varepsilon}, \tag{10.1.15}
 \end{aligned}$$

où on a organisé le coefficient devant l'intégrale de façon à faire apparaître des termes déjà présents dans PS2. Pour faciliter la suite du calcul on choisit des variables telles que les deux intégrales se découpent et que leurs bornes d'intégration soient 0 et 1. Pour cela on fait l'ultime changement de variable :

$$z_1 = 1 - z u, \tag{10.1.16}$$

de sorte l'espace de phase s'écrit :

$$PS3 = \left[ \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\pi^{3/2-\varepsilon}}{\Gamma(\frac{3}{2}-\varepsilon)} \left( \frac{16\pi^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \right] \frac{Q^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dz z^{1-2\varepsilon} (1-z)^{-\varepsilon} \int_0^1 du u^{-\varepsilon} (1-u)^{-\varepsilon}. \quad (10.1.17)$$

Les variables cinématiques ont alors l'expression :

$$\begin{aligned} \hat{s}_1 &= Q^2 z(1-u), & \hat{s}_2 &= Q^2 zu, & \hat{s}_3 &= Q^2(1-z), \\ 1 + \cos \theta_1 &= 2 \frac{(1-z)u}{1-zu}, & 1 - \cos \theta_1 &= 2 \frac{1-u}{1-zu}. \end{aligned} \quad (10.1.18)$$

Avec ces nouvelles variables le carré de l'élément de matrice s'écrit :

$$\begin{aligned} \Sigma |\mathcal{M}_{(1)}^{réel}|^2 &= (ee_q \mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 < N c_F > 8(1-\varepsilon) \left[ (1-\varepsilon) \left( \frac{1-u}{u} + \frac{u}{1-u} \right) + 2 \frac{1-z}{z^2 u(1-u)} - 2\varepsilon \right] \\ &= (ee_q \mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 < N c_F > 8(1-\varepsilon) \left[ \left( \frac{(z-1)^2 + 1}{z^2} - \varepsilon \right) \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right) - 2 \right] \end{aligned} \quad (10.1.19)$$

#### • Divergences infrarouge et colinéaire

Il est facile d'identifier les régions d'intégration qui engendreront des singularités. La limite  $u \rightarrow 1 \Leftrightarrow \cos \theta_1 \rightarrow 1$  implique la colinéarité des vecteurs  $k$  et  $p_1$  ( $\hat{s}_1 = 0$ ) et celle  $u \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \theta_1 \rightarrow -1$  implique la colinéarité des vecteurs  $k$  et  $p_2$  ( $\hat{s}_2 = 0$ ) d'où l'apparition de divergences lors de l'intégration de l'élément de matrice ci-dessus. La condition  $z \rightarrow 0 \Leftrightarrow k \rightarrow 0$  est la limite infrarouge qui produit également une divergence à cause du pôle en  $z$ . En revanche, la limite  $z \rightarrow 1 \Leftrightarrow \hat{s}_3 \rightarrow 0$ , qui est celle de la collinéarité du quark et de l'antiquark est parfaitement régulière. La contribution des termes réels au taux de désintégration sera donc :

$$\begin{aligned} e_q^2 \Gamma_1^{réels}(Q^2, \varepsilon) &= \frac{1}{2\sqrt{Q^2}} PS_3 \Sigma |\mathcal{M}_{(1)}^{réel}|^2 \\ &= e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) < c_F > \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dz \int_0^1 du \\ & \quad z^{1-2\varepsilon} (1-z)^{-\varepsilon} u^{-\varepsilon} (1-u)^{-\varepsilon} \left[ \left( \frac{(z-1)^2 + 1}{z^2} - \varepsilon \right) \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right) - 2 \right] \end{aligned} \quad (10.1.20)$$

On voit que les deux intégrales se factorisent et sont de la forme éq. (3.2.29) : elles peuvent être effectuées à l'aide de fonctions  $\Gamma$ , puisqu'elles ne font intervenir que des monômes  $u$ ,  $1-u$ ,  $z$ ,  $1-z$ . La structure du résultat sera claire : les pôles en  $u$  et  $1-u$  engendrent les divergences colinéaires en  $1/\varepsilon$ , quant au terme en  $1/z^2$  il présente une divergence infrarouge et le produit des deux sera un terme en  $1/\varepsilon^2$ . On trouve finalement :

$$e_q^2 \Gamma_1^{réels}(Q^2, \varepsilon) = e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) < c_F > \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \right] \left[ \frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} + \frac{19}{2} - \frac{2\pi^2}{3} \right]. \quad (10.1.21)$$

Quelques explications sont nécessaires : on a factorisé l'expression  $\Gamma(1-\varepsilon)/\Gamma(1-2\varepsilon)$  qui apparaît déjà dans la contribution virtuelle (10.1.5) ce qui amènera à évaluer l'expression :

$$\frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-2\varepsilon)}{\Gamma(1-3\varepsilon)} = 1 - \frac{\pi^2}{3}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (10.1.22)$$

d'après la relation (3.2.20). Dans la dernière ligne de (10.1.21) on a évidemment ignoré les termes d'ordre  $\varepsilon$ .

### 10.1.3 Taux de désintégration en hadrons

Au premier ordre en QCD perturbatif, pour une saveur de quark de masse nulle, la largeur de désintégration sera finalement :

$$\begin{aligned} e_q^2 \Gamma_1(Q^2) &= e_q^2 \left[ \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) + \Gamma_1^{\text{réels}}(Q^2, \varepsilon) + \Gamma_1^{\text{virtuels}}(Q^2, \varepsilon) \right] \\ &= e_q^2 \Gamma_0(Q^2, 0) \left[ 1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} \langle c_F \rangle \frac{3}{2} \right] \\ &= e_q^2 \Gamma_0(Q^2, 0) \left[ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right], \end{aligned} \quad (10.1.23)$$

où tous les termes divergents ont été compensés entre contributions réelle et virtuelle et la correction à la prédiction à l'ordre 0 est un simple facteur multiplicatif. Au premier ordre en QCD, on identifiera  $\sum_q e_q^2 \Gamma_1(Q^2)$  à la largeur de désintégration du photon virtuel en hadrons puisque les quarks et les gluons se matérialisent en hadrons avec une probabilité unité. Le rapport de la production hadronique sur celle d'une paire de muons, défini en éq. (6.5.1) sera donc :

$$R = \langle 3 \rangle \sum_q e_q^2 \left( 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right) \quad (10.1.24)$$

où on a sorti le facteur  $N = 3$  de couleur contenu dans  $\Gamma_0$ . On peut citer le résultat à l'ordre  $\alpha_s^3$  qui est <sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} R = 3 \sum_q e_q^2 \left[ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \left( \frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 (1.9857 - 0.1153 N_f) - \left( \frac{\alpha_s}{\pi} \right)^3 (6.6368 + 1.2001 N_f + 0.0052 N_f^2) \right] \\ - \left( \frac{\alpha_s}{\pi} \right)^3 1.2395 \left( \sum_q e_q \right)^2 \end{aligned} \quad (10.1.25)$$

where  $N_f$  is the number of active quark flavors. Ce résultat est valable pour des quarks de masse nulle, dans le schéma  $\overline{MS}$  avec le choix d'échelle de normalisation  $\mu^2 = Q^2$ .

### 10.1.4 Compensation des divergences et généralisation

Il est intéressant de voir plus en détail le mécanisme de compensation des divergences. Pour cela on revient à  $e_q^2 \Gamma_1^{\text{réels}}(Q^2, \varepsilon)$ , éq. (10.1.20), ne gardant que les termes menant à des pôles en  $\varepsilon$  :

$$e_q^2 \Gamma_1^{\text{réels}}(Q^2, \varepsilon)|_{\text{div}} \approx \frac{\langle c_F \rangle}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dz z^{-2\varepsilon} (1-z)^{-\varepsilon} \frac{(z-1)^2 + 1}{z} \int_0^1 du u^{-\varepsilon} (1-u)^{-\varepsilon} \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right).$$

L'intégrale angulaire se fait trivialement pour obtenir :

$$e_q^2 \Gamma_1^{\text{réels}}(Q^2, \varepsilon)|_{\text{div}} \approx \langle c_F \rangle \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left( \frac{-2}{\varepsilon} \right) \int_0^1 dz' (1-z')^{-2\varepsilon} z'^{-\varepsilon} \frac{z'^2 + 1}{1-z'},$$

1. voir par exemple, K.G. Chetyrkin, J.H. Kuhn and A.Kwiatkowski, Phys. Rept. **277** (1996) 189.

où on fait le changement de variable  $z' = 1 - z$  qui, dans une configuration colinéaire  $u = 1$  ou  $u = 0$ , est la fraction d'impulsion emportée par le quark ou l'antiquark produit de la fragmentation  $q \rightarrow q + G$  ou  $\bar{q} \rightarrow \bar{q} + G^2$ . Combinant maintenant cette expression avec la partie divergente de la contribution virtuelle, comme en éq. (10.1.23), on a :

$$e_q^2 \left( \Gamma_1^{\text{réels}}(Q^2, \varepsilon)|_{\text{div}} + \Gamma_1^{\text{virtuels}}(Q^2, \varepsilon)|_{\text{div}} \right) \approx \langle c_F \rangle \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \int_0^1 dz' \left\{ \left( \frac{-2}{\varepsilon} \right) (1 - z')^{-2\varepsilon} z'^{-\varepsilon} \frac{z'^2 + 1}{1 - z'} - \left( \frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} \right) \delta(1 - z') \right\},$$

qui se réduit, après extraction de la divergence infrarouge suivant la méthode usuelle de l'éq. (9.2.96), à :

$$e_q^2 \left( \Gamma_1^{\text{réels}}(Q^2, \varepsilon)|_{\text{div}} + \Gamma_1^{\text{virtuels}}(Q^2, \varepsilon)|_{\text{div}} \right) \approx \left( \frac{-2}{\varepsilon} \right) \langle c_F \rangle \int_0^1 dz' \left\{ \frac{z'^2 + 1}{(1 - z')_+} + \frac{3}{2} \delta(1 - z') \right\}, \quad (10.1.26)$$

où on a ignoré les termes non divergents en  $\varepsilon$ . Le coefficient du pôle (divergence colinéaire) est simplement l'intégrale  $\int_0^1 dz P_{qq}(z)$  du noyau d'Altarelli-Parisi, éq. (9.1.46), qui décrit la fragmentation colinéaire d'un quark. Mais on a déjà mentionné que cette intégrale est nulle. C'est la règle de somme, éq. (9.1.49), qui garantit la conservation du nombre de quarks de valence lorsqu'on prend en compte les corrections QCD au modèle des partons et qui garantit également ici la compensation des divergences infrarouges.

La discussion ci-dessus concerne la correction à la production d'un quark dur par émission d'un gluon. La configuration (quasi-)colinéaire de la fragmentation  $q \rightarrow q + G$  induit un terme divergent de la forme :

$$\frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{-1}{\varepsilon} \right) \int_0^1 dz P_{qq}(z). \quad (10.1.27)$$

S'inspirant de ce résultat on peut "deviner" qu'elle doit être la forme de la correction à la production d'un gluon dans un processus dur. Dans ce cas, les corrections d'ordre supérieur qui contribuent à une divergence colinéaire sont les fragmentations  $G \rightarrow G + G$  et  $G \rightarrow q + \bar{q}$  où il faut sommer sur les  $N_f$  saveurs de quarks produits : les deux engendrent une divergence colinéaire, la première ayant aussi une divergence infrarouge. La cinématique étant identique au cas  $q \rightarrow q + G$  on aura alors un terme :

$$\frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{-1}{\varepsilon} \right) \int_0^1 dz \left( P_{GG}(z) + 2 N_f P_{qG}(z) \right), \quad (10.1.28)$$

où  $P_{GG}(z)$  et  $P_{qG}(z)$  sont les noyaux d'Altarelli-Parisi associés à la fragmentation du gluon. D'après la règle de somme éq. (9.1.50) on voit que le résidu au pôle en  $\varepsilon$  s'annule et la divergence colinéaire disparaît.

### • Exercice

Calculer la section efficace  $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$  au premier ordre en QCD supposant les quarks de masse nulle. Calculer le rapport  $R = e^+e^- \rightarrow \text{hadrons} / e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  en fonction de  $Q^2$ . Est-ce que

---

2. Si  $u = 1$ ,  $\cos \theta_1 = 1$  et  $z' = z_1 = 1 - z$ ; si  $u = 0$ ,  $\cos \theta_1 = -1$  et  $z' = z_2 = 1 - z$ .

la correction en  $\alpha_s$  améliore l'accord avec les données expérimentales de la figure 6.2? On prendra en compte l'évolution du couplage  $\alpha_s(Q^2)$  en fonction de  $Q^2$  ainsi que de façon naïve le seuil de production du quark  $c$  de masse  $m_c = 1,275$  GeV et du quark  $b$  de masse  $m_b = 4,65$  GeV. A quel diagramme est dû le terme en  $(\sum_q e_q)^2$  dans l'éq. 10.1.25.

## 10.2 Production de gerbes hadroniques ou "jets"

On a vu en QED (chap. 5) que la définition de la section efficace de diffusion d'un électron d'énergie  $E$ , faisait intervenir la précision de l'appareil de mesure : la section efficace observable est définie théoriquement comme la section de production d'un électron d'énergie exactement égale  $E$  et d'un électron d'énergie plus faible accompagné d'un photon mou (non détecté) dont l'énergie maximale est définie par la résolution de l'appareil de mesure. La section efficace ainsi construite est finie dans l'infrarouge, mais il reste dans l'expression théorique des termes du type  $\log(E/m_e)$  associés à la colinéarité du photon avec l'électron. En QCD de tels termes ne sont pas définis, en quatre dimensions, puisque la masse du fermion est supposée nulle. Dans ce cas l'observable sera construit de façon à ce que l'état à un quark et celui à un quark accompagné d'un gluon quasi-colinéaire et/ou mou soient indistinguables et donc considérés comme un seul état physique (observable).

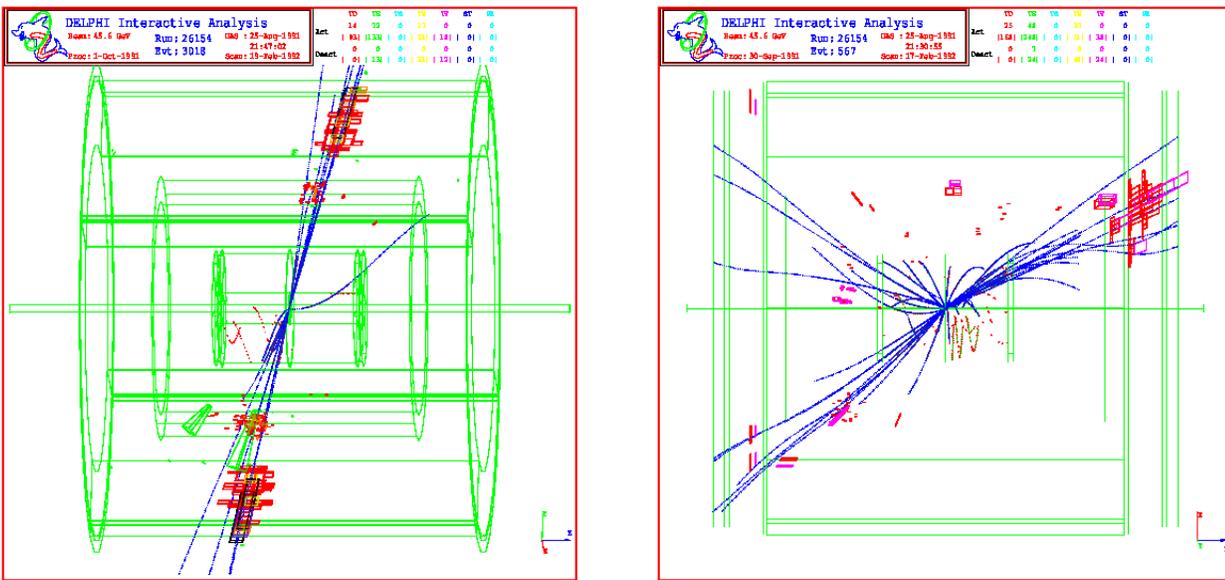


FIGURE 10.1 – Evènements à deux jets (à gauche) et à trois jets (à droite) dans la désintégration du boson  $Z$  au LEP (Collaboration DELPHI).

En QCD, les quarks et les gluons ne sont pas observables directement mais seulement par leurs produits de désintégration hadronique. Ainsi dans une collision  $e^+e^-$  à grand  $Q^2$ , on observera

la production de deux ou plusieurs gerbes hadroniques (voir Fig. 10.1), une gerbe ou "jet" étant défini comme un ensemble de particules quasi colinéaires c'est à dire dont l'impulsion transverse par rapport à l'axe de la gerbe est petite, chaque gerbe ou "jet" étant associé à l'hadronisation d'un parton. Ainsi la production de deux jets correspond théoriquement à la production d'une paire quark-antiquark, trois jets à une paire quark-antiquark et un gluon, quatre jets à deux paires quark-antiquark ou une paire quark-antiquark et deux gluons, etc. Mais un évènement à deux jets peut aussi correspondre à la production d'une paire quark-antiquark associée à un gluon où ce dernier est quasi colinéaire au quark ou à l'antiquark : expérimentalement on ne peut pas distinguer une gerbe hadronique produite par un quark à haute énergie de celle produite par l'association d'un quark et d'un gluon quasi colinéaires. Dans le calcul perturbatif il est donc naturel d'introduire deux classes d'évènements :

- ceux à deux jets qui recevront une contribution des :

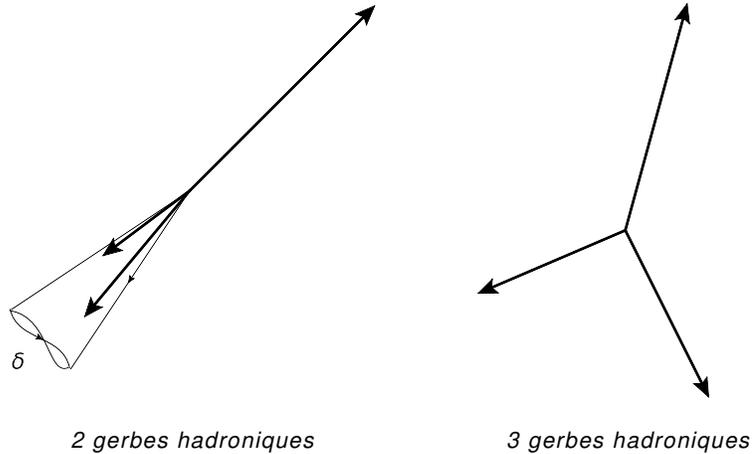
*terme de Born + contributions virtuelles*

*+ réels avec gluon mou ou quasi colinéaire au quark ou quasi colinéaire à l'antiquark*

- ceux à trois jets :

*termes réels à 3 partons, tous d'énergie supérieure à une valeur minimale et non colinéaires*

Ceci est illustré sur le schéma suivant où les vecteurs représentent l'impulsion des partons finals :



On va montrer par calcul explicite que les singularités infrarouge et colinéaire se compensent dans la classe des évènements à deux jets. De façon simple, on évalue d'abord la largeur de désintégration en trois jets, qui est régulière et donc calculable en 4-dimensions, et par soustraction de celle ci de la largeur totale, éq. (10.1.23), on obtient la largeur de désintégration en deux jets.

### • Taux de production de 3 jets

Un parton est "observable" en tant que "jet" s'il a une énergie suffisante et s'il est géométriquement séparé des autres, ce qui conduit à introduire la notion de "distance" entre deux partons. Cette "distance" peut être définie de plusieurs façons. On peut par exemple choisir les invariants comme mesure et on imposera alors que les invariants satisfassent à  $\hat{s}_i > s_0$  : si pour une paire de partons

$\hat{s}_i < s_0$  alors cette paire formera un seul jet et l'évènement aura une topologie à deux gerbes. Il est plus physique d'utiliser la méthode de Sterman et Weinberg<sup>3</sup> qui introduisent deux paramètres,  $\epsilon$  et  $\delta$ , que l'on suppose petits :  $\epsilon$  est la fraction d'énergie minimale portée par un parton et  $\delta$  définit l'angle minimal de séparation entre deux jets. Cela va introduire des restrictions sur l'espace de phase *PS3*. Ces conditions impliquent en particulier :

$$\begin{aligned} z &> \epsilon, \quad \text{cut-off infrarouge} \\ 1 - \cos \theta_1 &= \frac{2(1-u)}{1-zu} > 1 - \cos \delta \approx \frac{\delta^2}{2}, \quad \text{cut-off angulaire } \vec{k} \not\parallel \vec{p}_1 \\ 1 - \cos \theta_2 &= \frac{2u}{1-z(1-u)} > 1 - \cos \delta \approx \frac{\delta^2}{2}, \quad \text{cut-off angulaire } \vec{k} \not\parallel \vec{p}_2. \end{aligned} \quad (10.2.29)$$

Ces conditions angulaires se traduisent par :

$$\frac{(1-z)\delta^2/4}{1-z\delta^2/4} < u < \frac{1-\delta^2/4}{1-z\delta^2/4} \Rightarrow u_0 = (1-z)\delta^2/4 < u < 1 - (1-z)\delta^2/4 = u_1,$$

où dans les dernières inégalités on a négligé des termes d'ordre  $\delta^4$ . Avec la contrainte  $z > \epsilon$  ces conditions sont suffisantes pour éviter les singularités en  $z$  et  $u$  dans l'intégrale sur l'espace de phase *PS3*. On peut alors prendre  $\varepsilon = 0$  ( $n = 0$ ) dans l'expression éq. (10.1.20) de  $e_q^2 \Gamma_1^{r\acute{e}els}(Q^2, \varepsilon)$  et évaluer simplement :

$$e_q^2 \Gamma^{3jets}(Q^2, \epsilon, \delta) = e_q^2 \Gamma_0(Q^2) \frac{2\alpha_s}{3\pi} \int_{\epsilon}^1 dz \int_{u_0}^{u_1} du \left[ \frac{1+(1-z)^2}{z} \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right) - 2 \right]. \quad (10.2.30)$$

Les intégrales sont faciles à calculer et on trouve :

$$\begin{aligned} e_q^2 \Gamma^{3jets}(Q^2, \epsilon, \delta) &= e_q^2 \Gamma_0(Q^2) \frac{4\alpha_s}{3\pi} \left\{ 2 \ln \frac{4}{\delta^2} \left( \ln \frac{1}{\epsilon} - \frac{3}{4} + \epsilon - \frac{\epsilon^2}{4} \right) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta^2}{4} \left( 2 \ln \frac{1}{\epsilon} - \frac{23}{3} + 6\epsilon - \frac{5}{2}\epsilon^2 \right) - 2\epsilon + \epsilon^2 \right\} \\ &\sim e_q^2 \Gamma_0(Q^2) \frac{4\alpha_s}{3\pi} \left\{ 2 \ln \frac{4}{\delta^2} \ln \frac{1}{\epsilon} - \frac{3}{2} \ln \frac{4}{\delta^2} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{4} \right\}. \end{aligned} \quad (10.2.31)$$

Dans cette expression on a imposé les contraintes cinématiques uniquement sur l'énergie du gluon et sur l'angle entre impulsions du gluon et des quark/antiquark mais non sur l'énergie des quark/antiquark et leur angle relatif. Prendre ces dernières contraintes en compte induirait des corrections à l'éq. (10.2.31) d'ordre  $\epsilon$  et  $\delta^2$ , sans "grands" facteurs logarithmiques puisque les régions d'espace de phase concerné ne présentent pas de comportement divergent. Ces corrections sont négligeables.

### • Taux de production de 2 jets

A l'ordre auquel le calcul a été mené la largeur de désintégration d'un photon virtuel en deux jets s'obtient facilement par soustraction :

$$e_q^2 \Gamma^{2jets}(Q^2, \epsilon, \delta) = e_q^2 \Gamma_1(Q^2) - e_q^2 \Gamma^{3jets}(Q^2, \epsilon, \delta) \quad (10.2.32)$$

3. G.F. Sterman et S. Weinberg, Phys.Rev.Lett. **39** (1977), 1436

de celle à trois jets de la largeur totale,  $\Gamma_1(Q^2)$ , donnée par l'éq. (10.1.23). Le résultat est régulier et dépend bien sûr des paramètres caractérisant le jet. La comparaison du résultat perturbatif avec les données expérimentales est non trivial. Une possibilité est de coupler un programme de génération de deux et trois jets au sens ci-dessus avec un code d'hadronisation de jets tel que PYTHIA<sup>4</sup> et en imposant ensuite le même algorithme de reconstruction de jets sur les données simulées et les données expérimentales.

Le résultat éq. (10.2.32) sera valable seulement si  $\Gamma^{3jets}(Q^2, \epsilon, \delta)$ , d'ordre  $\alpha_s$ , est inférieure à  $\Gamma_1(Q^2)$  ou plutôt à  $\Gamma^{2jets}(Q^2, \epsilon, \delta)$  qui est d'ordre 1. Cela suppose que  $\epsilon$  et  $\delta$  ne soient pas trop petits. Ce type de problème a déjà été rencontré en QED. Pour améliorer la situation il faudrait faire le calcul aux ordres supérieurs et introduire les topologies à quatre jets, ...,  $n$  jets. Un calcul à tous les ordres mènerait à l'"exponentiation" des "grands logarithmes" comme en QED. Cela résulte du fait que pour qu'un événement à  $n$  partons produise une topologie à trois jets par exemple, il faut contraindre  $n - 3$  partons à rester invisibles ce qui introduit un facteur de suppression qui sommé  $\forall n$  s'exponentie (facteur de Sudakov)<sup>5</sup>.

#### • Discussion

Le taux de production de deux gerbes hadroniques a été construite comme le complément de

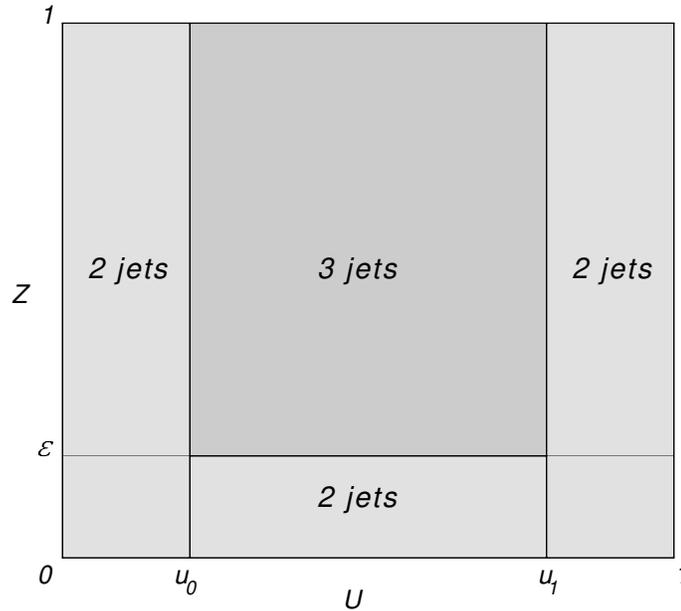


FIGURE 10.2 – Espace de phase des topologies à 2 gerbes et 3 gerbes.

la largeur à 3 gerbes. Ceci est illustré par la figure où on a représenté l'espace de phase total avec  $0 < u < 1$ , la variable angulaire en abscisse et  $0 < z < 1$ , l'énergie du gluon en ordonnée. Les configurations où le gluon est quasi colinéaire au quark ou à l'antiquark sont les deux bandes

4. T. Sjöstrand *et al.*, An introduction to PYTHIA 8.2, arxiv :1410.3012 [hep-ph].

5. G. Parisi et R. Petronzio, Nucl.Phys. **B154** (1979), 427.

verticales  $0 < u < u_0$  et  $u_1 < u < 1$  et celle à 3 jets est le domaine en gris foncé. On voit clairement que la configuration à 2 jets comprend en plus des deux bandes verticales (gluon colinéaire) aussi la portion d'espace de phase où le gluon est mou  $z < \epsilon$  mais n'est colinéaire à aucun des quarks. Ceci est nécessaire pour que la contribution des termes réels compense la divergence infrarouge du terme virtuel. On peut le vérifier explicitement en intégrant les termes réels sur l'espace de phase :

$$\int_0^1 dz \int_0^{u_0} du + \int_0^1 dz \int_{u_1}^1 du + \int_0^\epsilon dz \int_{u_0}^{u_1} du \tag{10.2.33}$$

Du point de vue observationnel, un parton mou engendre des hadrons de petite énergie qui contribuent au bruit de fond hadronique et non à la constitution de jets de sorte que les définitions théorique et expérimentale d'un évènement à 2 jets sont compatibles.

Nous reviendrons sur la définition d'un "jet" lors de la discussion sur la production de gerbes hadroniques dans les collisions proton-proton.

### 10.3 Production inclusive d'un hadron

On s'intéresse à l'observable  $e^+e^- \rightarrow hX$ . Comme précédemment on ne considèrera en fait que la partie  $\gamma^* \rightarrow hX$ . Dans l'esprit du modèle des partons naïf on supposera que le photon virtuel se casse en une paire quark-antiquark et que quark et antiquark se fragmentent, indépendamment, colinéairement en un hadron plus d'autres particules que l'on n'observe pas : ceci est paramétré par une "fonction de fragmentation"  $D_0^{h/q}(z)$  où  $z$  est la fraction d'impulsion du quark (ou antiquark)

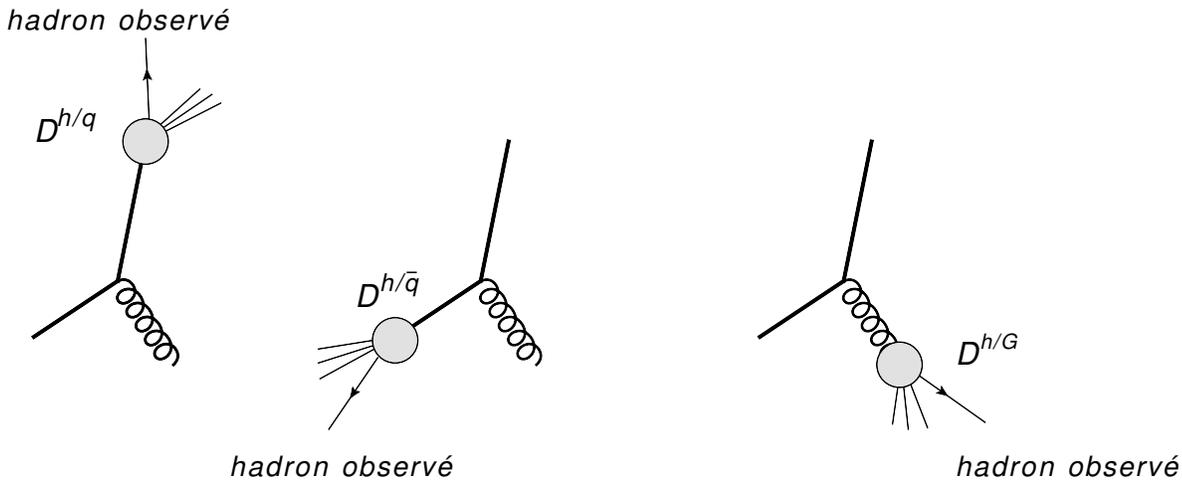


FIGURE 10.3 – Production inclusive d'un hadron dans une collision  $e^+ e^-$ . Le hadron observé est contenu dans les fragments de la désintégration de n'importe lequel des partons, quark, antiquark ou gluon produits dans l'annihilation  $e^+ e^-$ .

emportée par le hadron  $h$  détecté. La fonction de fragmentation paramètre en quelque sorte le processus croisé de celui décrit par la densité partonique  $q_0(z)$  introduite dans la discussion sur

DIS. Toujours dans l'esprit du modèle des partons où on convolue des probabilités et non des amplitudes, la production d'un hadron  $h$  d'énergie  $E = y\sqrt{Q^2}/2$ , fragment de désintégration d'un quark  $q$  ou d'un anti-quark  $\bar{q}$ , est donnée par la convolution suivante :

$$\frac{d\Gamma_0^h}{dy}(Q^2, y) = \sum_q \int_y^1 dz e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_0^q}{dz} D_0^{h/q}\left(\frac{y}{z}\right) + \sum_{\bar{q}} \int_y^1 dz e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_0^{\bar{q}}}{dz} D_0^{h/\bar{q}}\left(\frac{y}{z}\right) \quad (10.3.34)$$

où  $d\hat{\Gamma}_0^q/dz$  est le taux de production d'un quark (ou antiquark) d'impulsion  $\omega = z\sqrt{Q^2}/2$ . L'argument  $y/z$  dans les fonctions de fragmentation est bien la fraction d'énergie du parton transférée au hadron avec, évidemment, la condition  $y/z < 1$ . Intuitivement la création de la paire quark-antiquark est un processus dur, à courte distance ( $\sqrt{Q^2}$  grand), tandis que l'hadronisation est un phénomène à longue distance d'échelle caractéristique de l'ordre du GeV, ce qui justifie la factorisation éq. (10.3.34). Tous les ingrédients pour calculer ce taux de production sont donnés en section 10.1 : l'élément de matrice au carré est donné en (10.1.2) et l'intégrale sur l'espace de phase en (10.1.3) où on a omis d'effectuer l'intégration sur l'énergie du quark ou de l'antiquark  $\omega = z\sqrt{Q^2}/2$ . L'intégrale sur l'espace de phase peut s'écrire :

$$\frac{dPS2}{dz} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\pi^{3/2-\varepsilon}}{\Gamma(3/2-\varepsilon)} \left(\frac{16\pi^2}{Q^2}\right)^\varepsilon \delta(1-z). \quad (10.3.35)$$

Combinant espace de phase et élément de matrice on obtient le taux de production d'un quark (antiquark) :

$$e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_0^q}{dz} = \langle N \rangle \frac{\alpha}{2\pi} e_q^2 \sqrt{Q^2} (1-\varepsilon) \frac{\pi^{3/2-\varepsilon}}{\Gamma(3/2-\varepsilon)} \left(\frac{16\pi^2 \mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon \delta(1-z),$$

soit

$$e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_0^q}{dz} = e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \delta(1-z). \quad (10.3.36)$$

où  $\Gamma_0(Q^2, \varepsilon)$  a été définie à l'éq. (10.1.4). Finalement le taux de production d'un hadron se réduit donc simplement à :

$$\frac{d\Gamma_0^h}{dy}(Q^2, y, \varepsilon) = \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \left[ \sum_q e_q^2 D_0^{h/q}(y) + \sum_{\bar{q}} e_q^2 D_0^{h/\bar{q}}(y) \right]. \quad (10.3.37)$$

### 10.3.1 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : termes virtuels

Les corrections virtuelles ne changent pas la topologie du processus et on a vu que leur contribution est simplement un facteur multiplicatif au terme de Born de la production quark-antiquark : leur expression est donnée en éq. (10.1.5) de sorte qu'au premier ordre en QCD on a :

$$e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_1^{q \text{ virtuels}}}{dz} = e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \delta(1-z) \langle c_F \rangle \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \right] \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 8 + 2\frac{\pi^2}{3} \right\}, \quad (10.3.38)$$

qu'il faudra convoluer avec les fonctions de fragmentation comme en éq. (10.3.34) pour obtenir la contribution à la production de hadrons.

### 10.3.2 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : termes réels

Au premier ordre en QCD,  $\gamma^* \rightarrow q \bar{q} G$ , le hadron pourra être émis par le quark, l'antiquark ou le gluon. On construira donc cette contribution au taux de production sous la forme :

$$\frac{d\Gamma_1^{h \text{ réels}}}{dy} = \sum_q \int_y^1 dz e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_1^{q \text{ réels}}}{dz} D_0^{h/q}\left(\frac{y}{z}\right) + \sum_{\bar{q}} \int_y^1 dz e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_1^{\bar{q} \text{ réels}}}{dz} D_0^{h/\bar{q}}\left(\frac{y}{z}\right) + \int_y^1 dz \frac{d\hat{\Gamma}_1^G}{dz} D_0^{h/G}\left(\frac{y}{z}\right), \quad (10.3.39)$$

où dans ces intégrales la variable  $z$  n'est autre que l'énergie du parton normalisée par  $\sqrt{Q^2}/2$  comme en éqs. (10.1.13). On a introduit la fonction  $D_0^{h/G}$  qui paramètre la fragmentation du gluon en hadron. On évalue maintenant successivement les sections efficaces partoniques à l'ordre  $\alpha_s$ .

#### • Calcul de $d\hat{\Gamma}_1^G/dz$

Cette contribution peut facilement être obtenue à partir de l'éq. (10.1.20) : il suffit de ne pas évaluer l'intégrale sur la variable  $z$  d'énergie du gluon. L'intégration sur  $u$  engendre des termes en  $1/\varepsilon$  d'origine colinéaire tandis que la condition  $z > y$  élimine toute divergence infrarouge : on trouve alors facilement :

$$\frac{d\hat{\Gamma}_1^G}{dz} = \sum_q e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \langle c_F \rangle \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \right] z^{-2\varepsilon} (1-z)^{-\varepsilon} \left( -\frac{2}{\varepsilon} \right) \frac{1+(1-z)^2}{z}.$$

Développant en  $\varepsilon$ , le résultat recherché s'écrit :

$$\frac{d\hat{\Gamma}_1^G}{dz} = \sum_q e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \frac{\alpha_s}{2\pi} 2 \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} P_{Gq}(z) + d_G(z) \right\} \quad (10.3.40)$$

où on a introduit le noyau d'Altarelli-Parisi  $P_{Gq}(z)$ , déjà rencontré dans la discussion sur l'inélastique profond, éq. (9.1.46) :

$$P_{Gq}(z) = \langle c_F \rangle \frac{1+(1-z)^2}{z}, \quad (10.3.41)$$

et le terme régulier

$$d_G(z) = \langle c_F \rangle P_{Gq}(z) \ln(z^2(1-z)). \quad (10.3.42)$$

La présence de la fonction  $P_{Gq}(z)$  qui décrit l'émission colinéaire d'un gluon par un quark dans l'éq. (10.3.40) est claire : lors de l'intégration sur la variable  $u$ , pour un gluon d'impulsion  $z$  fixée, on inclut la configuration où le quark est colinéaire au gluon ( $u = 1$ ) ou à l'antiquark colinéaire au gluon ( $u = 0$ ), chacune de ces configurations engendrant un facteur  $-P_{Gq}(z)/\varepsilon$  comme dans le cas des corrections QCD à la fonction de structure d'un hadron.

#### • Calcul de $d\hat{\Gamma}_1^q/dz$

Le calcul est similaire au cas précédent et on s'attend à l'apparition de singularités lorsque le gluon sera colinéaire au quark émettant le hadron. Mais il y a deux complications : d'une part la variable d'énergie  $z$  est maintenant celle du quark qui n'est pas une des variables d'intégration de l'éq. (10.1.20) (dans laquelle  $z$  est l'énergie du gluon), d'autre part à énergie du quark fixée l'énergie du gluon s'annule lors de l'intégration sur la variable restante ce qui engendre une divergence infrarouge qu'il faut extraire et on a vu en subsection 9.2.4 que cette opération est loin d'être triviale ! En

fait, on avait estimé en section (10.1.4) qu'après intégration sur la variable angulaire il restait une partie divergente  $-P_{qq}(z)/\varepsilon$ . On va l'extraire explicitement ici en s'attachant à garder également les termes constants.

Pour le choix de la bonne variable on revient à l'intégrale d'espace de phase éq. (10.1.15) où les variables d'énergie du gluon et du quark jouent un rôle symétrique et, au lieu d'éliminer  $z_1$  comme en éq. (10.1.16), on élimine  $z$  par le changement de variable

$$z = 1 - z_1 u, \quad (10.3.43)$$

de sorte que l'espace de phase  $PS3$  sera comme en (10.1.17) dans lequel  $z_1$  joue le rôle de la variable  $z$ . Les invariants s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \hat{s}_1 &= Q^2 z_1 (1 - u), & \hat{s}_2 &= Q^2 (1 - z_1), & \hat{s}_3 &= Q^2 z_1 u \\ 1 + \cos \theta_1 &= 2 \frac{(1 - z_1)u}{1 - z_1 u}, & 1 - \cos \theta_1 &= 2 \frac{1 - u}{1 - z_1 u}, \end{aligned} \quad (10.3.44)$$

et l'élément de matrice devient, ignorant les termes d'ordre  $\varepsilon$  :

$$\Sigma |\mathcal{M}_{(1)}^{réel}|^2 = (ee_q \mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 < 3c_F > 8(1-\varepsilon) \left[ (1-\varepsilon) \left( \frac{z_1(1-u)}{1-z_1} + \frac{1-z_1}{z_1(1-u)} \right) + 2 \frac{u}{(1-z_1)(1-u)} \right]. \quad (10.3.45)$$

La relation entre variables et singularités est moins directe qu'auparavant : les divergences collinéaires seront engendrées quand  $u = 1 \Leftrightarrow \cos \theta_1 = 1$  c'est à dire  $\vec{k} \parallel \vec{p}_1$  et  $z_1 = 1 \Rightarrow \cos \theta_1 = -1$  c'est à dire  $\vec{k} \parallel \vec{p}_2$ . Quant à la singularité infrarouge  $z = 0$  elle sera atteinte pour  $z_1 = u = 1$  ( $\vec{k}$  colinéaire à la fois à  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$ , donc nul!). On remarque que  $u = 0$  implique  $\hat{s}_3 = 0$  et  $z = 1$ , soit  $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$  tous deux opposés à  $\vec{k}$ , configuration qui ne conduit pas à une singularité de l'élément de matrice. Convoluant l'expression (10.3.45) avec  $PS3$  et après intégration sur la variable  $u$  on obtient :

$$\begin{aligned} e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_1^{q \text{ réels}}}{dz_1} &= e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) < c_F > \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \right] z_1^{-2\varepsilon} (1-z_1)^{-\varepsilon} \\ &\quad \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \frac{1+z_1^2}{1-z_1} - \left( \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\varepsilon \right) \frac{1}{1-z_1} + \frac{5}{2} - \frac{3}{2} z_1 \right\}. \end{aligned} \quad (10.3.46)$$

Lors de la convolution de cette section efficace partonique avec la fonction de fragmentation du quark, comme en éq. (10.3.39), le point singulier  $z_1 = 1$  sera atteint et il faut donc recourir à un développement en  $\varepsilon$  similaire à celui de l'éq. (9.3.140) pour extraire le comportement divergent et les termes finis. Par exemple, pour le premier terme entre accolades on écrira :

$$\begin{aligned} \int_y^1 dz_1 z_1^{-2\varepsilon} (1-z_1)^{-\varepsilon} \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \frac{1+z_1^2}{1-z_1} \right\} D_0^{h/q} \left( \frac{y}{z_1} \right) = \\ \int_y^1 dz_1 \left\{ \frac{2}{\varepsilon^2} \delta(1-z_1) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1+z_1^2}{(1-z_1)_+} + (1+z_1^2) \left[ \left( \frac{\ln(1-z_1)}{1-z_1} \right)_+ + 2 \frac{\ln z_1}{1-z_1} \right] \right\} D_0^{h/q} \left( \frac{y}{z_1} \right), \end{aligned}$$

et pour le deuxième terme,

$$\begin{aligned} \int_y^1 dz_1 z_1^{-2\varepsilon} (1-z_1)^{-\varepsilon} \left\{ -\left( \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\varepsilon \right) \frac{1}{1-z_1} \right\} D_0^{h/q} \left( \frac{y}{z_1} \right) = \\ \int_y^1 dz_1 \left\{ \frac{3}{2\varepsilon} \delta(1-z_1) + \frac{7}{2} \delta(1-z_1) - \frac{3}{2} \frac{1}{(1-z_1)_+} \right\} D_0^{h/q} \left( \frac{y}{z_1} \right), \end{aligned}$$

tandis que le troisième terme est régulier et on peut donc prendre  $\varepsilon = 0$ . La contribution, au premier ordre en  $\alpha_s$  d'une saveur de quark à la production d'un hadron comprendra le terme de Born (10.3.36), les virtuels (10.3.38) et les réels, qui après compensation des doubles pôles en  $\varepsilon$  s'écrit :

$$\begin{aligned} e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_1^q}{dz_1} &= e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_0^q}{dz_1} + e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_1^{q \text{ virtuels}}}{dz_1} + e_q^2 \frac{d\hat{\Gamma}_1^{q \text{ réels}}}{dz_1} \\ &= e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \left\{ \delta(1 - z_1) + \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \right] \left( -\frac{1}{\varepsilon} \right) P_{qq}(z_1) + \frac{\alpha_s}{2\pi} d_q(z) \right\}, \end{aligned} \quad (10.3.47)$$

où la fonction  $P_{qq}(z)$  est le noyau d'Altarelli-Parisi, éq. (9.1.46), déjà rencontré plus haut en (10.1.26) et

$$d_q(z) = \langle c_F \rangle \left\{ \left( \frac{2\pi^2}{3} - \frac{9}{2} \right) \delta(1 - z) + (1 + z^2) \left[ \left( \frac{\ln(1 - z)}{1 - z} \right)_+ + 2 \frac{\ln z}{1 - z} \right] - \frac{3}{2} \frac{1}{(1 - z)_+} + \frac{5}{2} - \frac{3}{2} z \right\}. \quad (10.3.48)$$

Ces expressions sont aussi valables pour la section efficace de production d'un antiquark.

### 10.3.3 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : production inclusive d'un hadron

Pour obtenir le taux de production d'un hadron on doit convoluer les éqs. (10.3.47) et (10.3.40) avec les fonctions de fragmentation appropriées comme en (10.3.39). Ne gardant pour le moment que le terme de Born et ceux d'ordre  $\alpha_s$  avec un pôle en  $\varepsilon$  on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_1^h}{dy} \Big|_{div} &= \sum_q e_q^2 \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \int_y^1 dz \left\{ \delta(1 - z) \left( D_0^{h/q} \left( \frac{y}{z} \right) + D_0^{h/\bar{q}} \left( \frac{y}{z} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \right] \left( -\frac{1}{\varepsilon} \right) \left[ P_{qq}(z) \left( D_0^{h/q} \left( \frac{y}{z} \right) + D_0^{h/\bar{q}} \left( \frac{y}{z} \right) \right) + 2P_{Gq}(z) D_0^{h/G} \left( \frac{y}{z} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10.3.49)$$

S'inspirant du cas de l'inélastique profond en sec. 9.2.6 on définit la fonction de fragmentation d'un quark  $q$ , violant l'invariance d'échelle par (voir l'éq. (9.2.118)) :

$$D^{h/q}(y, Q^2) = D_0^{h/q}(y) + \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \right] \left( -\frac{1}{\varepsilon} \right) \int_y^1 dz \left[ P_{qq}(z) D_0^{h/q} \left( \frac{y}{z} \right) + P_{Gq}(z) D_0^{h/G} \left( \frac{y}{z} \right) \right], \quad (10.3.50)$$

et *idem* pour l'antiquark. A l'aide de ces fonctions on obtient le spectre inclusif d'un hadron dans la désintégration du  $\gamma^*$  incluant les termes "constants" issus des éqs. (10.3.40) et (10.3.47) :

$$\boxed{\frac{d\Gamma_1^h}{dy} = \Gamma_0(Q^2, \varepsilon) \sum_q e_q^2 \left\{ D^{h/q}(y, Q^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_y^1 dz \left[ d_q(z) D^{h/q} \left( \frac{y}{z}, Q^2 \right) + d_G(z) D^{h/G} \left( \frac{y}{z}, Q^2 \right) \right] \right.} \\ \left. + D^{h/\bar{q}}(y, Q^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_y^1 dz \left[ d_q(z) D^{h/\bar{q}} \left( \frac{y}{z}, Q^2 \right) + d_G(z) D^{h/G} \left( \frac{y}{z}, Q^2 \right) \right] \right\}.}$$

(10.3.51)

Plusieurs points méritent discussion, points que l'on mentionnera cependant sans explications puisqu'ils ont déjà été commentés dans le cas de la diffusion inélastique profonde. On a introduit partout en éq. (10.3.51) les fonctions de fragmentation avec violations d'invariance d'échelle ce qui est perturbativement justifié. On pourrait choisir une échelle de factorisation  $M^2 \neq Q^2$  où un schéma de factorisation différent du schéma  $\overline{MS}$  utilisé ici : il faudrait alors modifier convenablement le second membre de l'éq. (10.3.51) (voir sec. 9.2.7).

Revenant à l'éq. (10.3.50) et poursuivant l'analogie avec DIS on calcule la dérivée logarithmique de  $D^{h/q}(y, Q^2)$  par rapport à  $Q^2$  pour obtenir l'équation dévolution DGLAP, indépendante de  $\varepsilon$ , donc finie :

$$Q^2 \frac{D^{h/q}(y, Q^2)}{dQ^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_y^1 dz \left[ P_{qq}(z) D^{h/q}\left(\frac{y}{z}, Q^2\right) + P_{Gq}(z) D_0^{h/G}\left(\frac{y}{z}, Q^2\right) \right]. \quad (10.3.52)$$

La violation d'invariance d'échelle de la fonction de fragmentation est engendrée lorsque le hadron est émis par le quark ou par le gluon, produits de désintégration du quark initial. Intégrant cette équation, on obtiendra la fonction de fragmentation  $D^{h/q}(y, Q^2)$  finie que l'on utilisera pour calculer la production inclusive d'un hadron. La fonction de fragmentation du gluon obéit aussi à une équation de type DGLAP :

$$Q^2 \frac{D^{h/G}(y, Q^2)}{dQ^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_y^1 dz \left[ P_{qG}(z) D^{h/q}\left(\frac{y}{z}, Q^2\right) + P_{GG}(z) D_0^{h/G}\left(\frac{y}{z}, Q^2\right) \right]. \quad (10.3.53)$$

avec, dans l'approximations des logarithmes dominants, les noyaux  $P_{ij}$  donnés en éqs. (9.1.46)).

Il existe plusieurs paramétrages des fonctions de fragmentation avec évolution au NLO : Kretzer<sup>6</sup>, BFGW<sup>7</sup>, HKNS<sup>8</sup>, DSS<sup>9</sup>, AKK<sup>10</sup>. Ils sont obtenus à partir de spectres inclusifs de hadrons mesurés dans les collisions  $e^+e^-$ ,  $e^{+/-}p$  et/ou  $pp$ . Ils peuvent différer dans leurs prédictions pour certains observables puisqu'ils ne sont pas obtenus à partir des mêmes données initiales<sup>11</sup> (voir la section 13.4).

---

6. S. Kretzer, Phys. Rev **D62** (2000), 054001, [hep-ph/0003177v2]  
7. BFGW : L. Bourhis, M. Fontannaz, J.-Ph. Guillet, M. Werlen, Eur. Phys. J **C19** (2001), 89, [hep-ph/0009101]  
8. HKNS : M. Hirai, S. Kumano, T.-H. Nagai, K. Sudoh, Phys. Rev. **D75** (2007), 094009, [hep-ph/0702250v2]  
9. DSS : D. De Florian, R. Sassot, M. Stratmann, Phys. Rev. **D76** (2007), 114010, [arXiv :0707.1506v1]  
10. AKK : S. Albino, B. Kniehl, G. Kramer, Nucl. Phys. **B803** (2008), 42, [arXiv :0803.2768v2]  
11. F. Arleo, M. Fontannaz, J.-Ph. Guillet, Chi Linh Nguyen, JHEP **1404** (2014), 147, [arXiv :1311.7356]

