

# Chapitre 11

## Unitarité, règles de coupure

On a vu dans l'étude des boucles en QED et QCD qu'il apparaissait des logarithmes des invariants de la réaction dont l'argument pouvaient être négatif. La prescription  $i\epsilon$  de Feynman, fondée sur la causalité, permettait de donner un sens mathématique au logarithme d'argument négatif. Ainsi un terme tel que  $\ln(m^2 - q^2 - i\epsilon)$  comme en éq. (4.1.25) est défini par :

$$\ln(m^2 - (q^2 + i\epsilon)) = \ln|m^2 - q^2| - i\pi\Theta(q^2 - m^2).$$

Le point  $q^2 = m^2$  est un point de branchement et, dans le plan  $q^2$  complexe, on définit une coupure le long de l'axe réel de  $q^2 = m^2$  à  $l'\infty$ , de sorte que la partie imaginaire est la moitié de la discontinuité de la fonction à travers la coupure :

$$2i\text{Im}f(q^2) = f(q^2 + i\epsilon) - f(q^2 - i\epsilon)$$

Le logarithme ainsi défini est monovalué dans le plan complexe. En fait, la partie imaginaire qui apparaît dans le calcul des boucles a une interprétation physique qui est une conséquence des contraintes d'unitarité que doivent satisfaire les amplitudes de diffusion. Pour voir cela, il est utile de revenir à la théorie de la matrice  $S$  dont les composants fondamentaux sont les amplitudes de diffusion et non les champs.

Avant la formulation de la chromodynamique quantique et la découverte de la liberté asymptotique il n'était possible d'utiliser la théorie des perturbations pour étudier les interactions fortes. L'approche suivie était alors fondée sur la matrice  $S$  qui dans un processus de diffusion connecte les états asymptotiques entrant et sortant. Du fait de la conservation des probabilités la matrice  $S$  est unitaire. L'unitarité  $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$  implique des relations non-linéaires entre les amplitudes de diffusion et, comme on le verra, cela joue un rôle fondamental pour déterminer la structure analytique de ces amplitudes. Le postulat de base de l'approche de la matrice  $S$  est que les amplitudes de diffusion sont des fonctions analytiques des invariants de la réaction, fonctions analytiques dont les singularités sur l'axe réel sont données par les contraintes d'unitarité. Ce postulat est satisfait en théorie quantique des champs dans l'approche perturbative.

### 11.1 Matrice $S$ , unitarité, théorème optique

On considère un processus de diffusion de deux particules  $1+2 \rightarrow 3+4$ . On suppose l'interaction entre particules à suffisamment courte portée pour que les états entrant ( $t \rightarrow -\infty$ ) et sortant

( $t \rightarrow \infty$ ) soient considérés comme formés de particules libres entièrement caractérisées par leur impulsion (on traite le cas de particules scalaires, à spin et isospin nuls)<sup>1</sup>. Pour simplifier l'écriture on note les états par un symbole discret  $|m\rangle$  et on suppose que l'ensemble de ces états forme une base complète orthonormée :

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}, \quad \sum_m |m\rangle\langle m| = 1. \quad (11.1.1)$$

D'après le principe de supersposition de mécanique quantique l'état final peut être écrit  $S|m\rangle$  où  $S$  est un opérateur linéaire. La probabilité de trouver le système dans un état final  $|n\rangle$  est donnée par le carré de l'élément de matrice :

$$\langle n|S|m\rangle. \quad (11.1.2)$$

Pour un état initial quelconque qui peut être écrit  $|i\rangle = \sum_m a_m|m\rangle$ , avec  $\sum_m |a_m|^2 = 1$ , la probabilité que le système soit mesuré dans n'importe quel état  $|n\rangle$  est unité (conservation des probabilités) :

$$\sum_n \langle i|S^\dagger|n\rangle\langle n|S|i\rangle = \langle i|S^\dagger S|i\rangle = \sum_{m,m'} a_m^* a_{m'} \langle m|S^\dagger S|m'\rangle = 1. \quad (11.1.3)$$

Ceci doit être vrai  $\forall$  état initial (ou pour tout état final si on somme sur les états initiaux), d'où on tire  $S^\dagger S = SS^\dagger = 1$  : la matrice  $S$  est unitaire. Si on considère une transformation de Lorentz  $L$ ,  $L|m\rangle = |m'\rangle$ , on demande que les observables soient indépendantes du choix du repère :

$$\langle n'|S|m'\rangle^2 = \langle n|S|m\rangle^2. \quad (11.1.4)$$

Puisque le choix de la phase est arbitraire on impose plutôt la condition :

$$\langle n'|S|m'\rangle = \langle n|S|m\rangle, \quad (11.1.5)$$

ce qui implique que l'élément de matrice ne dépend, si on exclut la fonction  $\delta$  de conservation d'énergie-impulsion, que des invariants du problème, soit :

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2, \quad \text{avec} \quad s + t + u = \sum_i m_i^2. \quad (11.1.6)$$

Ceci est aussi vrai pour des particules avec spin si on somme sur tous les états de polarisation des particules. Comme on a choisi de caractériser les états par leur impulsion les particules sont très probablement séparées dans l'espace et elles ont peu de chance d'interagir. On introduit la matrice d'interaction  $T$  à l'aide de laquelle on définira la section efficace de collision entre particules interagissantes :

$$S = 1 + iT, \quad (11.1.7)$$

de sorte que :

$$i(T^\dagger - T) = T^\dagger T = T T^\dagger. \quad (11.1.8)$$

1. Cette section suit le chapitre 1 de *The Analytic S-Matrix* par R.J. Eden, P.V. Landshoff, D.I. Olive, J.C. Polkinghorne, Cambridge University Press 1966.

Si on considère la transition d'un état initial  $|i\rangle$  à un état final  $|f\rangle$  on a :

$$\begin{aligned} i(\langle f|T^\dagger|i\rangle - \langle f|T|i\rangle) &= \sum_n \langle f|T^\dagger|n\rangle \langle n|T|i\rangle \\ \Leftrightarrow i(\langle i|T|f\rangle^* - \langle f|T|i\rangle) &= \sum_n \langle n|T|f\rangle^* \langle n|T|i\rangle, \end{aligned} \quad (11.1.9)$$

avec  $\sum_n |n\rangle \langle n|$  un ensemble complet d'états compatibles avec les différentes lois de conservation. Comme cas particulier on choisit  $|f\rangle = |i\rangle$  et on a donc :

$$\boxed{2 \operatorname{Im} \langle i|T|i\rangle = \sum_n |\langle n|T|i\rangle|^2}, \quad (11.1.10)$$

ce qui implique que la partie imaginaire de l'amplitude de transition élastique vers l'avant est proportionnelle à la somme des carrés des transitions de l'état initial en tous les états physiques permis par les lois de conservation, c'est à dire la section efficace totale.

On introduit l'élément de matrice invariant  $\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}$  obtenu à partir de l'élément de matrice de transition par troncation de la fonction  $\delta$  de conservation d'énergie-impulsion :

$$\langle 34|T|12\rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \mathcal{M}_{12 \rightarrow 34} \quad (11.1.11)$$

avec la normalisation des états à une particule libre :

$$\begin{aligned} \langle q|p\rangle &= (2\pi)^3 2\omega_p \delta^{(3)}(q - p) \\ |p\rangle &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\omega_q} |q\rangle \langle q|p\rangle = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \Theta(q_0) \delta(q^2 - m^2) |q\rangle \langle q|p\rangle. \end{aligned} \quad (11.1.12)$$

Pour simplifier, on ne considère dans la suite qu'un seul type de particule scalaire de masse  $m$ . Injectant ces relations dans l'éq. (11.1.10) et ne gardant, pour le moment, que deux particules dans l'état intermédiaire on trouve après simplification du facteur de conservation d'énergie-impulsion globale<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} \mathcal{M}_{12 \rightarrow 12}(s, t=0) &= \int \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2\omega_3} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2\omega_4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p_3}{2\omega_3} \delta^{(+)}((p_1 + p_2 - p_3)^2 - m^2) |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{p}{4\sqrt{s}} \int d\Omega |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}|^2, \end{aligned} \quad (11.1.13)$$

où on a fait l'intégrale sur l'énergie dans le centre de masse où l'impulsion des particules est dénotée  $p$ . Une fois divisé par le flux de particules entrantes  $4\sqrt{((p_1 \cdot p_2)^2 - m^4)} = 4p\sqrt{s}$  dans le centre de masse, le membre de droite n'est autre que  $\sigma_{2 \rightarrow 2}$  la section efficace de diffusion du processus 2 particules  $\rightarrow$  2 particules intégrée sur tout l'espace de phase. On obtient donc :

$$\operatorname{Im} \mathcal{M}_{12 \rightarrow 12}(s, t=0) = 2p\sqrt{s} \sigma_{2 \rightarrow 2}, \quad \text{pour } 4m^2 < s < 9m^2 \quad (11.1.14)$$

2. On définit  $\delta^{(+)}(p^2 - m^2) = \Theta(p_0) \delta(p^2 - m^2)$ .

qui exprime la partie imaginaire de l'amplitude élastique vers l'avant en fonction de la section efficace totale du processus  $2 \rightarrow 2$ . Ceci est valable à basse énergie pour  $4m^2 < s < 9m^2$ . En effet, au dessus du seuil de production de 3 particules la section efficace  $\sigma_{2 \rightarrow 3}$  contribuera et plus généralement, au dessus de chaque seuil de production d'une particule supplémentaire on aura une nouvelle contribution de sorte que :

$$\boxed{\text{Im} \mathcal{M}_{12 \rightarrow 12}(s, t = 0) = 2p\sqrt{s} \sum_n \sigma_{2 \rightarrow n} = 2p\sqrt{s} \sigma_{tot},} \quad (11.1.15)$$

La partie imaginaire de l'amplitude élastique vers l'avant,  $t = 0$ , est à un facteur près à la section efficace totale. Ce résultat est connu sous le nom de théorème optique. Il est très important car il indique la structure de l'amplitude de diffusion considérée comme fonction de la variable d'énergie complexe  $s$ . En résumé, choisissant la variable de transfert dans la région physique,  $t < 0$ , (on peut facilement généraliser l'éq. (11.1.15) à  $t < 0$ ) on voit que pour  $0 < s < 4m^2$  l'amplitude est réelle puisque la diffusion  $2 \rightarrow 2$  n'est pas possible. Pour  $s > 4m^2$  l'amplitude acquiert une partie imaginaire : on introduit une coupure de  $s = 4m^2$  à l' $\infty$  le long de l'axe réel et on définit la partie imaginaire comme :

$$2i \text{Im} \mathcal{M}_{12 \rightarrow 12}(s, t) = \mathcal{M}_{12 \rightarrow 12}(s + i\epsilon, t) - \mathcal{M}_{12 \rightarrow 12}(s - i\epsilon, t), \quad (11.1.16)$$

c'est à dire comme la discontinuité de la fonction à travers la coupure. Cette prescription est dictée par la causalité et elle est reliée, en théorie quantique des champs, à la prescription de Feynman dans les propagateurs<sup>3</sup> (voir l'exemple du logarithme en début de chapitre).

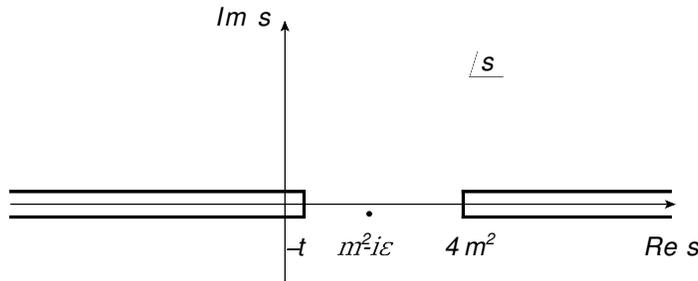


FIGURE 11.1 – Structure analytique dans le plan d'énergie  $s$  complexe de l'amplitude invariante à  $t$  fixé. La coupure de droite est la conséquence de l'unitarité dans la voie  $s$  et celle de gauche dans la voie  $u$ .

On a défini plus haut les invariants,  $s$ ,  $t$ ,  $u$  dont le domaine de variation pour le processus  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  est  $s > 4m^2$ ,  $4m^2 - s < t < 0$ ,  $4m^2 - s < u < 0$ . Si on renverse le signe des impulsions  $p_1$  et  $p_3$ , les variables  $u > 4m^2$ ,  $4m^2 - u < s < 0$  et  $4m^2 - u < t < 0$  correspondront à la région physique de la réaction  $\bar{3} + 2 \rightarrow \bar{1} + 4$ . Sous cette opération  $t$  reste inchangé et, à  $t$  fixé,  $s$  et  $u$  ne sont pas indépendants puisque  $s = 4m^2 - t - u$  par la relation (11.1.6). L'amplitude de diffusion  $\mathcal{M}_{\bar{3}2 \rightarrow \bar{1}4}(u, t)$  n'est autre que  $\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}(s, t)$  où les invariants sont évalués dans la

3. On rappelle la discussion sur les propagateurs du fermion et du photon au chapitre 2.

région physique de la réaction  $\bar{3} + 2 \rightarrow \bar{1} + 4$ . Cette amplitude a donc une partie imaginaire quand  $u > 4m^2$ , soit  $s < -t$  et on a alors une deuxième coupure d'unitarité dans le plan  $s$  complexe de  $s < -t$  à  $-1\infty$ . On dit que les réactions  $\bar{3} + 2 \rightarrow \bar{1} + 4$  et  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  sont reliées par croisement et leur amplitude de diffusion est la même fonction analytique prise à des valeurs de  $s$  différentes. Les points de branchement ne sont pas les seules singularités dans le plan des invariants complexes : si les nombres quantiques permettent la transition  $\phi + \phi \rightarrow \phi$  on aura alors un pôle dans la voie  $s$  à  $s = m^2 - i\epsilon$  et éventuellement dans la voie  $u$  si  $\bar{\phi} + \phi \rightarrow \phi$  est permis : ce pôle à  $u = m^2 - i\epsilon$  sera donc à  $s = 3m^2 - t + i\epsilon$ . On définira l'amplitude physique pour la voie  $s$  comme la limite pour  $\epsilon \rightarrow 0+$  de  $\mathcal{M}(s+i\epsilon, t)$  pour  $s > 4m^2$  et celle de la voie  $u$  comme  $\mathcal{M}(s-i\epsilon, t)$  pour  $s < 0$ .

### • Exemple

Le diagramme de polarisation du vide en sec. 4.1 permet d'illustrer cette discussion très simplement. On avait alors introduit le tenseur  $\Pi_{\mu\nu}(q)$ . Sommer sur la polarisation du photon revient à considérer :

$$-g^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}(q) = 3q^2\Pi(q^2),$$

d'après l'éq. (4.1.13). Cette fonction n'est autre que 2 fois la transition  $\mathcal{M}_{\gamma^* \rightarrow \gamma^*}$  puisque sommé sur la polarisation du photon. Ignorant le contre-terme on avait trouvé en (4.1.18) pour la fonction scalaire :

$$\Pi(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2 - q^2 x(1-x) - i\epsilon}{m^2}. \quad (11.1.17)$$

D'après l'éq. (4.1.25) la partie imaginaire est :

$$i \operatorname{Im}\Pi(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} (-i\pi) \int_0^1 dx x(1-x) \Theta(q^2 x(1-x) - m^2), \quad (11.1.18)$$

qui est finie. Le maximum de  $x(1-x)$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  est  $1/4$  de sorte la partie imaginaire sera non nulle dès que  $q^2 > 4m^2$ . Les racines de l'argument de la fonction  $\Theta$  sont :

$$x_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4m^2/q^2}}{2}, \quad x_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m^2/q^2}}{2}, \quad (11.1.19)$$

et on peut alors exprimer la partie imaginaire du diagramme de polarisation comme :

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im}\Pi_{\mu}^{\mu}(q) &= 6\alpha q^2 \int_0^1 dx x(1-x) \Theta((x_+ - x)(x - x_-)) \\ &= \alpha \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} (q^2 + 2m^2), \quad q^2 \geq 4m^2. \end{aligned} \quad (11.1.20)$$

D'après la discussion ci-dessus,  $-\operatorname{Im}\Pi_{\mu}^{\mu}(q) = 2 \operatorname{Im}\mathcal{M}_{\gamma^* \rightarrow \gamma^*}$  doit être égal, à un facteur de normalisation près, au taux de désintégration d'un photon virtuel en une paire de leptons,  $\gamma^* \rightarrow l + \bar{l}$ . On peut aisément le vérifier en calculant directement le carré de l'élément de matrice  $\mathcal{M}_{\gamma^* \rightarrow l\bar{l}} = (-ie) \epsilon^{\mu}(q) \bar{u}(l) \gamma_{\mu} v(\bar{l})$  intégré sur tout l'espace de phase des impulsions  $l, \bar{l}$  finales. On trouve bien finalement, en accord avec (11.1.13), que :

$$2 \operatorname{Im}\mathcal{M}_{\gamma^* \rightarrow \gamma^*} = \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3 2l_0} \frac{d^3 \bar{l}}{(2\pi)^3 2\bar{l}_0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - l - \bar{l}) \overline{\Sigma} |\mathcal{M}_{\gamma^* \rightarrow l\bar{l}}|^2 \quad (11.1.21)$$

Le résultat éq. (11.1.20) est instructif. Il a deux parties : un facteur "dynamique",  $(q^2 + 2m^2)$ , qui est simplement le carré de l'élément de matrice et un facteur cinématique,  $\sqrt{1 - 4m^2/q^2}$ , dont l'origine est l'intégrale sur l'espace de phase qui s'annule, comme l'impulsion des particules produites, au seuil de production des particules  $q^2 = 4m^2$ .

• **Application : propagateur d'une particule instable**

On considère une particule scalaire  $\Phi$  de masse  $M$  qui peut se désintégrer en deux particules plus légères  $\phi$  de masse  $m$ ,  $\Phi \rightarrow \phi + \phi$  avec un couplage  $-ig$ . Après renormalisation le propagateur aura la forme éq. (3.1.46) :

$$G^{(1)}(p) = i \frac{1 - \delta Z_3 + d \Pi^{\text{boucle}}/d p^2|_{M^2}}{p^2 - M^2 - i \text{Im} \Pi^{\text{boucle}}(M^2)} \quad (11.1.22)$$

Dans cette expression on a fait la renormalisation de masse et utilisé le fait que dans tout schéma de renormalisation la singularité du propagateur est à la masse physique  $M$  (voir la discussion sur l'invariance du pôle du propagateur autour de l'éq. (4.2.72)). On a aussi explicité l'éventuelle partie imaginaire de  $\Pi(p^2)$  évaluée sur couche de masse. Au premier ordre de la théorie des perturbations  $\Pi(p^2)$  est simplement donné par la boucle de champs  $\phi$  et on trouve en utilisant les techniques du chapitre 3 :

$$\Pi(q^2) = -\frac{g^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right) + \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 - q^2 x(1-x) - i\epsilon}{\mu^2}. \quad (11.1.23)$$

La partie imaginaire est donc (voir l'évaluation de (11.1.20)) :

$$\text{Im} \Pi(p^2) = -\frac{g^2}{32\pi} \sqrt{1 - 4m^2/p^2}, \quad p^2 > 4m^2, \quad (11.1.24)$$

qui est bien non nulle quand  $p^2 = M^2 > 4m^2$ . D'après la discussion précédente cette quantité est bien reliée au taux de désintégration de la particule  $\Phi$ . On le vérifie facilement en calculant explicitement la largeur de désintégration de la particule  $\Phi$  définie par<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2M} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p'}{2p'_0} \Theta(p'_0) \delta^{(+)}((p-p')^2 - m^2) |\mathcal{M}_{\Phi \rightarrow \phi\phi}|^2 \\ &= \frac{1}{2M} \frac{g^2}{16\pi} \sqrt{1 - 4m^2/M^2}. \end{aligned} \quad (11.1.25)$$

On a alors en accord<sup>5</sup> avec l'éq. (11.1.13) :

$$- \text{Im} \Pi(M^2) = M \Gamma$$

et le propagateur de la particule instable s'écrit finalement :

$$G^{(1)}(p) = i \frac{1 - \delta Z_3 + d \Pi^{\text{boucle}}/d p^2|_{M^2}}{p^2 - M^2 + iM\Gamma}. \quad (11.1.26)$$

Ceci est la forme qu'on utilise, par exemple, pour les bosons de jauge  $W^\pm$  et  $Z$ . Le pôle dans le plan complexe est déplacé par rapport à l'axe réel d'une distance proportionnelle à  $-iM\Gamma$  : il est à  $p^2 = M^2 - iM\Gamma$  au lieu de  $p^2 = M^2 - i\epsilon$  pour une particule stable.

4. On utilise le facteur de normalisation habituel  $1/2M$  qui relie la largeur au carré de l'élément de matrice.

5. Le signe  $-$  vient du choix  $-i\Pi(p^2)$  pour dénoter la boucle.

### 11.2 Relations de dispersion

Si, comme c'est le cas en théorie des champs, on suppose que les seules singularités de l'amplitude de diffusion sont les pôles et les coupures et si on connaît par unitarité les discontinuités à travers les coupures, alors par le théorème de Cauchy on peut calculer la fonction complète. En effet, on peut représenter la fonction  $\mathcal{M}(s, t)$  par l'intégrale le long du petit contour orienté  $C_0$  comme indiqué sur la figure :

$$\mathcal{M}(s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} ds' \frac{\mathcal{M}(s', t)}{s' - s}. \tag{11.2.27}$$

Si  $\mathcal{M}(s, t) \rightarrow 0$  au moins comme  $1/s$  quand  $|s| \rightarrow \infty$  on peut déformer le contour à l'infini. Prenant l'exemple de la structure analytique de la figure 11.1 avec deux coupures et un pôle, le contour  $C_1$  comprend les grands demi-cercles "à l'infini", les demi-droites le long de l'axe réel et le petit cercle autour du pôle : la contribution des demi-cercles à l'infini est nulle et l'intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(s, t) &= \text{Rés} + \frac{1}{2\pi i} \int_{4m^2}^{\infty} ds' \frac{\mathcal{M}(s' + i\epsilon, t) - \mathcal{M}(s' - i\epsilon, t)}{s' - s} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-t} ds' \frac{\mathcal{M}(s' + i\epsilon, t) - \mathcal{M}(s' - i\epsilon, t)}{s' - s} \\ &= \text{Rés} + \frac{1}{2\pi i} \int_{4m^2}^{\infty} ds' \frac{\text{Disc } \mathcal{M}(s', t)}{s' - s} + \frac{1}{2\pi i} \int_{4m^2}^{\infty} du' \frac{\text{Disc } \mathcal{M}_u(u', t)}{u' - u}, \end{aligned} \tag{11.2.28}$$

où Rés est la valeur du résidu au pôle. La fonction  $\mathcal{M}_u(u, t)$  est définie comme  $\mathcal{M}(4m^2 - t - u, t)$

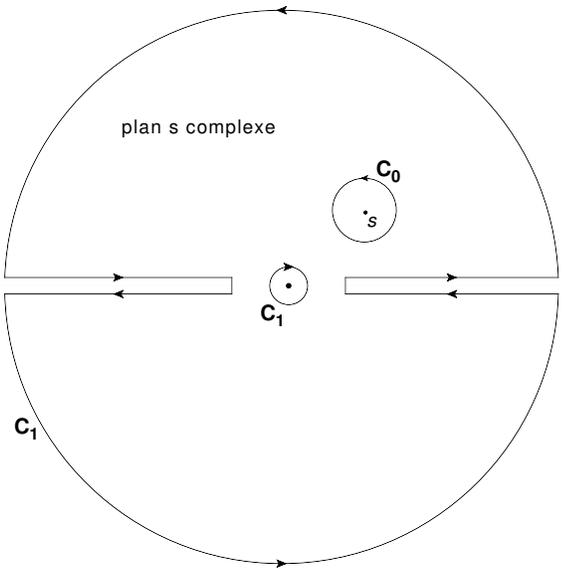


FIGURE 11.2 – Contour dans le plan  $s$  complexe, à  $t$  fixé, pour l'évaluation de la relation de dispersion. Après déformation de  $C_0$  à  $C_1$  le petit contour  $C_1$  autour du pôle est orienté dans le sens contraire du sens trigonométrique.

et la discontinuité d'une fonction comme  $\text{Disc}f(x) = f(x + i\epsilon) - f(x - i\epsilon) = 2i\text{Im}f(x)$ . Ce type

de représentation est appelé relation de dispersion. Si l'amplitude  $\mathcal{M}(s, t)$  n'est pas suffisamment convergente mais si  $\mathcal{M}(s, t)/(s - s_1)$  ( $s_1$  arbitraire) l'est, on peut alors écrire la relation de dispersion pour cette dernière fonction. Cela introduit dans la relation de dispersion, lors de la déformation du contour  $C_0$  en  $C_1$  un nouveau pôle à  $s_1$  dont le résidu n'est pas connu mais qui contribuera un terme constant à  $\mathcal{M}(s, t)$ . Ce coefficient est appelé constante de soustraction et la fonction  $\mathcal{M}(s, t)$  sera connue à une constante près : cet arbitraire est l'équivalent de l'arbitraire du choix du contre-terme en théorie de la renormalisation, comme on va le voir sur l'exemple suivant.

• **Application : reconstruction de la boucle en théorie scalaire**

On revient à la désintégration  $\Phi \rightarrow \phi + \phi$  dont on a calculé la partie imaginaire  $\text{Im}\Pi(s)$  en éq. (11.1.24). Dans le plan complexe  $\Pi(s)$  a une structure simple, seulement une coupure pour  $s > 4m^2$ . La convergence à l'infini de  $\text{Im}\Pi(s)$  n'étant pas suffisante il faut écrire la relation de dispersion avec une soustraction au point  $s_1$  :

$$\frac{\Pi(s)}{s - s_1} = \frac{\text{Rés}}{s - s_1} - \frac{1}{2\pi i} \int_{4m^2}^{\infty} ds' \frac{2i(g^2/32\pi)\sqrt{1 - 4m^2/s'}}{(s' - s)(s' - s_1)} \quad (11.2.29)$$

où Rés est le résidu arbitraire au pôle  $s_1$ . On fait l'intégration par partie pour faire apparaître des logarithmes de type  $\ln(s' - s)$ , d'où :

$$\frac{\Pi(s)}{s - s_1} = \frac{\text{Rés}}{s - s_1} + \frac{g^2}{32\pi^2} \frac{1}{s - s_1} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{\sqrt{1 - 4m^2/s'}} \frac{2m^2}{s'^2} \ln \frac{s' - s}{s' - s_1}, \quad (11.2.30)$$

puisque le terme intégré s'annule aux bornes de l'intégration. Faisant le changement de variable  $s' = 4m^2/z$  on arrive à :

$$\Pi(s) = \text{Rés} + \frac{g^2}{64\pi^2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z}} \ln \frac{4m^2 - zs}{4m^2 - zs_1}. \quad (11.2.31)$$

On peut choisir le paramètre arbitraire Rés de sorte que  $\text{Re}\Pi(M^2) = 0$  (condition de renormalisation dans le schéma  $ON$ ), et on aura alors :

$$\Pi^{ON}(s) = \frac{g^2}{64\pi^2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z}} \ln \frac{4m^2 - zs}{4m^2 - zM^2}. \quad (11.2.32)$$

On peut comparer ce résultat avec celui obtenu par calcul direct de  $\Pi(s)$ , éq. (11.1.23), qui est :

$$\Pi^{ON}(s) = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 - sx(1 - x) - i\epsilon}{m^2 - M^2x(1 - x) - i\epsilon}. \quad (11.2.33)$$

Pour montrer l'équivalence des deux résultats on divise l'intervalle d'intégration en deux parties  $[0, 1/2]$  et  $[1/2, 1]$  et on prend comme variable d'intégration :

$$z = 4x(1 - x), \quad \text{qui a deux solutions, } x^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - z}). \quad (11.2.34)$$

On écrit :

$$\Pi^{ON}(s) = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^{\frac{1}{2}} dx^- \dots + \frac{g^2}{32\pi^2} \int_{\frac{1}{2}}^1 dx^+ \dots, \quad (11.2.35)$$

et passant à la variable d'intégration  $z$  on voit facilement que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx^- = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}} \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 dx^+ = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}} \quad (11.2.36)$$

ce qui mène bien au résultat recherché.

• **Exercice**

Reconstruire la polarisation du vide en QED dans le schéma  $ON$  à l'aide de la relation de dispersion utilisant (voir éq. (11.1.20)) :

$$-\text{Im}\Pi_\mu^\mu(s) = \alpha \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} (s + 2m^2), \quad s \geq 4m^2. \quad (11.2.37)$$

### 11.3 Diagrammes et unitarité : règles de coupure de Cutkosky

On peut donner une représentation diagrammatique simple des différents termes qui constituent le carré de l'amplitude du processus. Pour cela, on observe d'abord que le complexe conjugué de l'amplitude  $\mathcal{M}_{12 \rightarrow 3 \dots n}$  construite à l'aide des règles de Feynman est simplement  $\mathcal{M}_{3 \dots n \rightarrow 12}^*$  qui dénote l'amplitude où les particules  $3 \dots n$  sont entrantes et 12 sortantes et où tous les  $i$  des vertex et propagateurs sont changés en  $-i$  : par exemple en QED/QCD pour une amplitude de la forme  $(\bar{u}(p_3)\mathcal{F}_1 u(p_1) \bar{v}(p_2)\mathcal{F}_2 v(p_4))^* = \bar{u}(p_1)\mathcal{F}_1^* u(p_3) \bar{v}(p_2)\mathcal{F}_2^* v(p_4)$  avec  $\mathcal{F}_i^*$  le complexe conjugué de  $\mathcal{F}_i$ . Dans l'opération de conjugaison complexe une (anti-)particule entrante devient une (anti-)particule sortante et vice-versa. Du point de vue de la représentation graphique on aura donc :

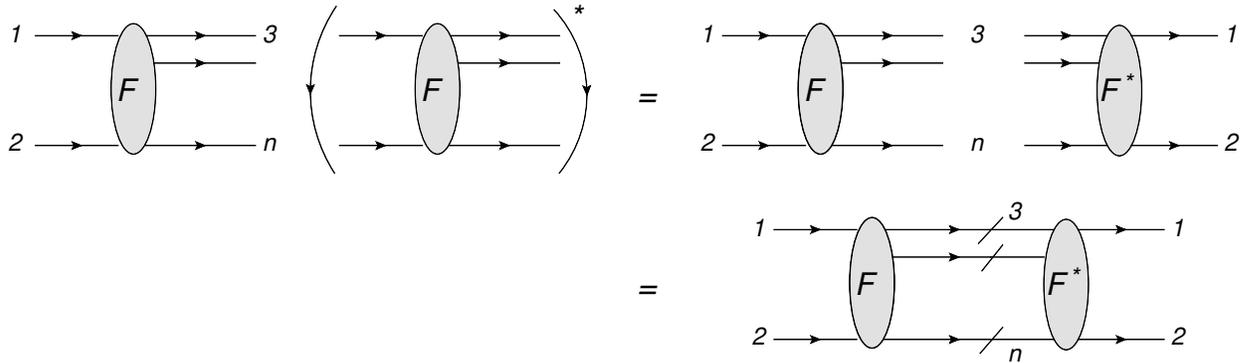


FIGURE 11.3 – Représentation de la convolution d'une amplitude avec sa complexe conjuguée.

Comme indiqué sur la figure, on représente la convolution du membre de droite par un diagramme où toutes les lignes internes sont connectées mais "coupées" pour indiquer qu'elles sont mises sur couche de masse : par exemple, pour une ligne fermionique d'impulsion  $p_j$  dans l'état final on associe à la ligne coupée le facteur :

$$(\not{p}_j + m) \frac{dp_j^4}{(2\pi)^3} \Theta(p_{j0}) \delta(p_j^2 - m^2) \quad \text{au lieu de} \quad \frac{i(\not{p}_j + m)}{p_j^2 - m^2 - i\epsilon} \frac{dp_j^4}{(2\pi)^4} \quad \text{pour une ligne non coupée.}$$

Le facteur  $(\not{p}_j + m)$  est la somme sur les états de polarisation du fermion  $j$  et

$$\frac{dp_j^4}{(2\pi)^3} \Theta(p_{j0}) \delta(p_j^2 - m^2) \quad \text{qui n'est autre que} \quad \frac{dp_j^3}{(2\pi)^3 2|p_{j0}|}, \quad (11.3.38)$$

est le facteur d'espace de phase associé à particule sur couche de masse d'énergie positive. Ceci est la conséquence de la relation :

$$\text{Disc} \frac{i}{p_j^2 - m^2 - i\epsilon} = 2\pi \delta(p_j^2 - m^2). \quad (11.3.39)$$

En théorie des perturbations  $F$  sera une somme de diagrammes écrits avec les règles de Feynman tandis que  $F^*$  le sera en faisant la substitution  $i \rightarrow -i$  dans les règles de Feynman. Il faut finalement intégrer avec la condition  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - \dots - p_n)$  pour obtenir la contribution à la partie imaginaire de l'amplitude  $2 \rightarrow 2$ . On a ainsi une représentation graphique de la relation d'unitarité :

$$2\text{Im} \mathcal{M}_{12 \rightarrow 12} = \sum_n \int \left( \prod_{3 \leq j \leq n} \frac{dp_j^3}{(2\pi)^3 2|p_{j0}|} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - \dots - p_n) |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 3 \dots n}|^2. \quad (11.3.40)$$

• Exemple

On peut préciser la relation entre diagrammes et le calcul d'une section efficace sur un exemple simple que l'on a déjà discuté en détail au chapitre 10 :  $e^+ + e^- \rightarrow \text{hadrons}$  ou plus simplement encore  $\gamma^* \rightarrow \text{hadrons}$ . Prenant en compte terme de Born, contributions virtuelles et réelles,

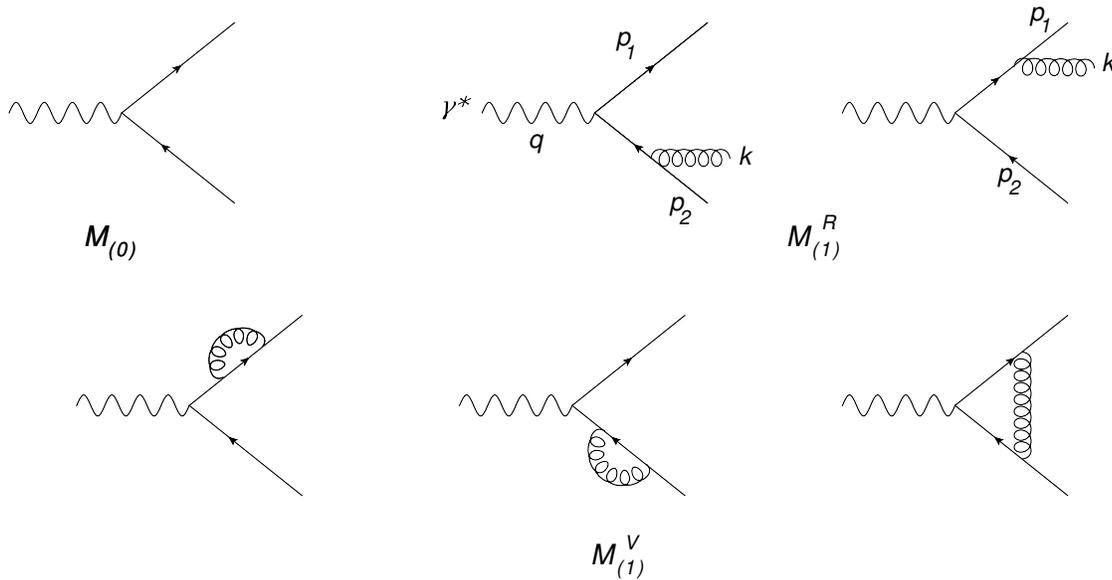


FIGURE 11.4 – Amplitudes de diffusion partonique au premier ordre en QCD pour le processus  $\gamma^* \rightarrow \text{hadrons}$

l'amplitude au niveau partonique est représentée en fig. 11.4 et elle s'écrit :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{(0)} + \mathcal{M}_{(1)}^V + \mathcal{M}_{(1)}^R, \tag{11.3.41}$$

et son carré :

$$\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}_{(0)}^2 + 2\text{Re}(\mathcal{M}_{(1)}^V \mathcal{M}_{(0)}^*) + 2\text{Re}(\mathcal{M}_{(1)}^R \mathcal{M}_{(1)}^{R*}) + \dots, \tag{11.3.42}$$

où on a, comme d'habitude, négligé les termes  $\mathcal{M}_{(1)}^V \mathcal{M}_{(1)}^{V*}$  qui sont d'ordre supérieur. La convolu-

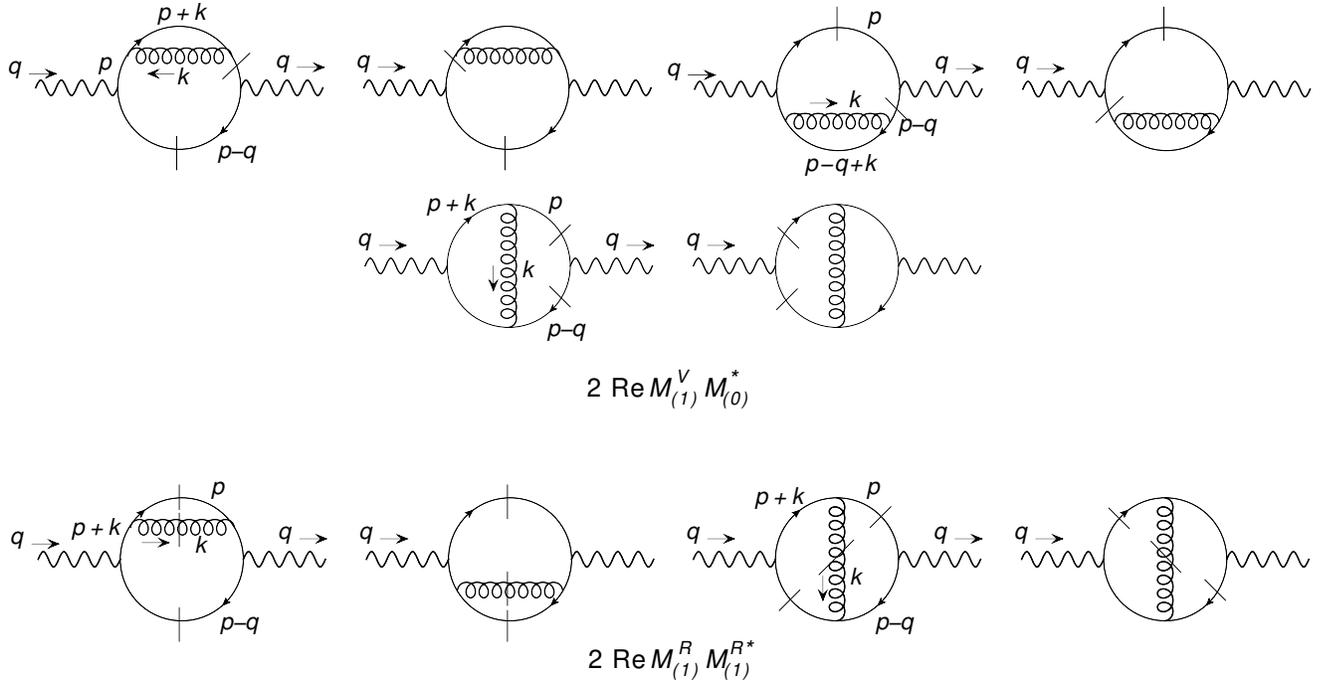


FIGURE 11.5 – Carré de la somme des amplitudes de diffusion partonique au premier ordre en QCD pour le processus  $\gamma^* \rightarrow \text{hadrons}$

tion de l'amplitude virtuelle avec le terme de Born est représentée sur les deux premières lignes de la fig. 11.5 (convolution avec les diagrammes de self-énergie en première ligne et avec le vertex en deuxième) tandis que le carré des termes réels est en dernière ligne. Par construction, on voit que les deux premiers diagrammes sont complexes conjugués et leur somme est donc réelle et de même pour les troisième et quatrième et ceux de la deuxième ligne. A cet ordre de la théorie des perturbations on est conduit à considérer les diagrammes à deux boucles de deux types de topologie, correction au propagateur et correction au vertex. Pour chaque topologie, deux fois la partie imaginaire du diagramme est la somme de toutes les discontinuités c'est à dire la somme des contributions obtenues en coupant le diagramme de toutes les façons possibles en deux parties disjointes. Par définition, les contributions réelles sont obtenues en mettant toutes les lignes internes sur couche de masse et les virtuelles en gardant au moins une ligne interne non coupée. Ceci est une illustration des règles de coupure de Cutkosky<sup>6</sup> selon lesquelles deux fois la partie imaginaire d'un diagramme est la somme

6. R.E. Cutkosky, J.Math.Phys. **1** (1960) 429; Annales Institut Poincaré Phys.Théor. **A29** 211.

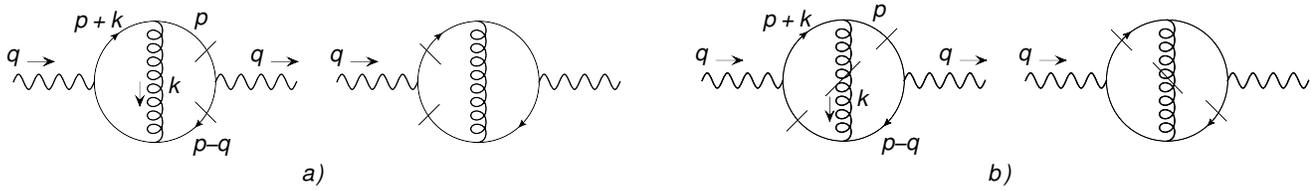


FIGURE 11.6 – a) : Coupure correspondant à la contribution des termes virtuels ; b) coupure correspondant au terme réel : terme d'interférence.

de toutes ses discontinuités.

Une présentation générale des règles de coupure a été donnée par 't Hooft et Veltman<sup>7</sup> et on en trouve une version simple dans le livre de Le Bellac<sup>8</sup>. On va voir maintenant comment la compensation des divergences infrarouges et colinéaires peut se comprendre à l'aide des diagrammes coupés.

## 11.4 Règles de Cutkosky et compensation des divergences

On a vu au chapitre 10 par un calcul explicite la compensation des divergences infrarouges et colinéaires pour une section efficace suffisamment intégrée. Pour cela on avait effectué les intégrales sur l'espace des phases séparément pour chaque type de termes (réels et virtuels) ce qui avait nécessité de travailler en  $n \neq 4$  dimensions pour donner un sens aux divergences induites par l'intégration. Dans l'approche que nous allons suivre maintenant nous regroupons la contribution des termes réels et virtuels dans un même intégrand que l'on montrera être fini dans les configurations singulières, infrarouge et/ou colinéaire. On se place dans le repère où l'impulsion du photon virtuel est  $q = (Q, 0, 0, 0)$  et où l'impulsion  $p$  du quark produit définit l'axe  $Oz$  de sorte que l'intégrale angulaire de  $p$  donne simplement  $4\pi$ . On suppose les quarks de masse nulle. On considère toutes les coupures d'un diagramme d'une topologie donnée et nous appliquons cela au diagramme de type vertex. La contribution de la coupure "réelle" vient de l'interférence des deux diagrammes en  $M_{(1)}^R$  de la figure 11.4, comme indiqué sur la figure 11.6-b). La cinématique pour le terme réel est définie par  $\gamma^*(q) \rightarrow q(p) + \bar{q}(p') + G(k)$  et la contribution de ces termes s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= 2\text{Re} \left\{ (-ie)(ie)(-ig)(ig) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \Theta(p'_0) \delta(p'^2) (2\pi)^4 \delta(q - p - p' - k) \right. \\
 &\quad \left. \frac{i}{(p+k)^2 + i\epsilon} \frac{-i}{(p-q)^2 + i\epsilon} \text{TR} \right\} \\
 &= \frac{e^2 g^2}{(2\pi)^4} \int p dp \frac{d^3k}{k} \Theta(Q - p - k) \frac{\delta((p+k-q)^2)}{(p+k)^2 (p-q)^2} \text{TR} \quad (11.4.43)
 \end{aligned}$$

où on fait l'intégrale sur  $p'$  ainsi que celle sur les angles de  $p$ . Le symbole TR est simplement la trace :

$$\text{TR} = (-g^{\mu\nu})(-g^{\alpha\beta}) \text{Tr} [\gamma_\beta \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\alpha (\not{p} + \not{k} - \not{q}) \gamma_\nu (\not{p} - \not{q})]. \quad (11.4.44)$$

7. G. 't Hooft, M.J.G.Veltman, *Diagrammar*, CERN Yellow report, <https://cds.cern.ch/record/186259>.

8. Michel Le Bellac, *Des phénomènes critiques aux champs de jauge*, EDP Science, 1998.

L'expression (11.4.43) est à comparer à la contribution des termes virtuels en  $a$ ) sur la figure :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} &= 2\text{Re} \left\{ (-ie)(ie)(-ig)(-ig) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \Theta(p'_0) \delta(p'^2) (2\pi)^4 \delta(q-p-p') \right. \\
&\quad \left. \frac{i}{(p+k)^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p+k-q)^2 + i\epsilon} \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \text{TR} \right\} \\
&= \frac{e^2 g^2}{(2\pi)^4} \int p dp d^4k \Theta(Q-p) \delta((p-q)^2) \\
&\quad \left[ \frac{\delta(k^2)}{(p+k)^2(p+k-q)^2} + \frac{\delta((p+k)^2)}{k^2(p+k-q)^2} + \frac{\delta((p+k-q)^2)}{k^2(p+k)^2} \right] \text{TR} \\
&= \frac{e^2 g^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{4} \int d^4k \left[ \frac{\delta(k^2)}{(p+k)^2(p+k-q)^2} + \frac{\delta((p+k)^2)}{k^2(p+k-q)^2} + \frac{\delta((p+k-q)^2)}{k^2(p+k)^2} \right] \text{TR} \quad (11.4.45)
\end{aligned}$$

où pour obtenir les dernières lignes on utilise la relation de type :

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{p^2 - m^2} - i\pi \delta(p^2 - m^2), \quad (11.4.46)$$

le premier terme du membre de droite étant compris au sens de partie principale. Pour simplifier on ignore le facteur TR, ce qui revient à considérer une théorie scalaire par exemple. On calcule d'abord  $\mathbf{R}$  en évaluant l'intégrale sur  $p$  grâce à la fonction  $\delta((p+k-q)^2)$  qui contraint :

$$2p = \frac{Q(Q-2k)}{Q-k(1-\cos\theta)}, \quad (11.4.47)$$

et on trouve :

$$\mathbf{R} = \frac{e^2 g^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{4Q^2} \int \frac{dk}{k} \frac{d\cos\theta}{1-\cos^2\theta} \Theta(Q-p-k) \quad (11.4.48)$$

où  $\theta$  est l'angle entre  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{k}$ . On évalue également facilement le premier terme de  $\mathbf{V}$ , proportionnel à  $\delta(k^2)$  en tenant compte des deux solutions  $k_0 = \pm k$  :

$$\mathbf{V}_{k^2=0} = -\frac{e^2 g^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{4Q^2} \int \frac{dk}{k} \frac{d\cos\theta}{1-\cos^2\theta} \quad (11.4.49)$$

Combinée avec  $\mathbf{R}$ , les divergences à  $k=0$  et  $\cos\theta = \pm 1$  se compensent. En effet ces valeurs singulières des variables d'intégration sont toujours compatibles avec la contrainte de positivité de la combinaison  $Q-p-k$  dans  $\mathbf{R}$ . Il est important de noter que si dans  $\mathbf{R}$  le gluon a une énergie positive,  $k_0 = k$ , dans le cas de  $\mathbf{V}$  il est nécessaire de prendre en compte les deux cas  $k_0 = \pm k$ . On peut montrer maintenant que les deux autres contributions de  $\mathbf{V}$ , en  $\delta((p+k)^2)$  et  $\delta((q-p+k)^2)$  sont égales et chacune est finie. Par exemple, ne gardant que le terme d'espace de phase et les dénominateurs, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{(p+k)^2=0} &= \frac{e^2 g^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{4} \int d^4k \frac{\delta((p+k)^2)}{k^2(p+k-q)^2}, \\
&= \frac{e^2 g^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{8Q^2} \int k^2 dk \frac{d\cos\theta}{\sqrt{Q^2 + 4k(Q\cos\theta + k)}} \left[ \frac{1}{k_0^+ (k_0^+ - k\cos\theta)} + \frac{1}{k_0^- (k_0^- - k\cos\theta)} \right],
\end{aligned}$$

où  $k_0^\pm$  sont les solutions de la contrainte  $(p+k)^2=0$ , soit :

$$k_0^\pm = \frac{1}{2} \left( -Q \pm \sqrt{Q^2 + 4k(Q \cos \theta + k)} \right). \quad (11.4.50)$$

Combinant les termes en  $k_0^\pm$  on fait apparaître au dénominateur le facteur  $(1 - \cos^2 \theta)$ . Ramenant l'intégrale angulaire à l'intervalle  $[0, 1]$  et faisant le changement de variable  $\cos \theta = 1 - z$  l'expression ci-dessus prend la forme :

$$\mathbf{V}_{(p+k)^2=0} = \frac{e^2 g^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{8Q^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^1 \frac{dz}{z(2-z)} \frac{-2Qkz}{Q^2 - k^2} + \dots, \quad (11.4.51)$$

où on a gardé uniquement les termes potentiellement divergents en configuration infrarouge et colinéaire. Les intégrales sont bien finies comme annoncé. Cet exemple simple est une illustration du théorème prouvé à tous les ordres par Kinoshita<sup>9</sup> selon lequel les divergences infrarouges et colinéaires se compensent entre les coupures d'un même diagramme à condition d'intégrer sur un espace de phase suffisant.

#### • Amusement

On considère la réaction  $q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow q(p_3) + q(p_4) + \bar{q}(p_5) + \bar{q}(p_6)$  de quarks identiques. Quelques diagrammes de l'amplitude de diffusion sont représentés en figure 11.7 Utilisant la représentation

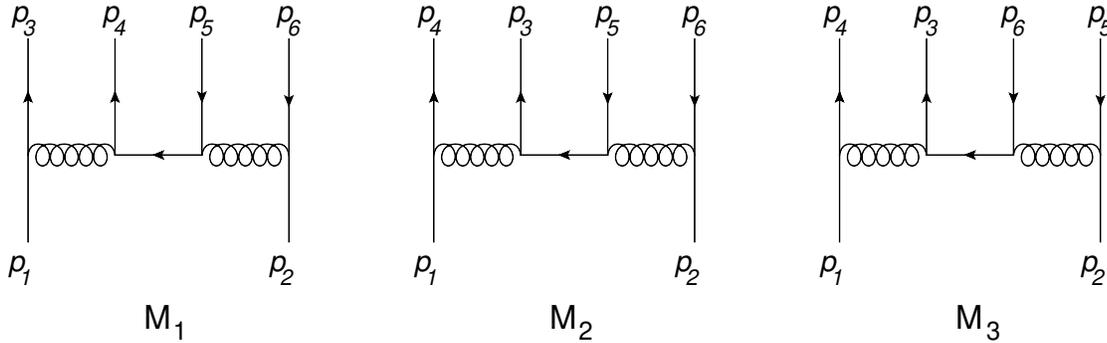


FIGURE 11.7 –

de la figure 11.3 pour le carré de l'amplitude, il est facile montrer que  $|\mathcal{M}_i|^2$  est le produit de trois traces,  $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*$  de deux traces et  $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_3^*$  est constitué d'une seule trace. En effet, une fois tracés le diagramme et son complexe conjugué il suffit de connecter les lignes de même impulsion y compris celle des particules initiales ; dès qu'une ligne fermionique se ferme en boucle on obtient une trace. On suit une procédure identique pour les diagrammes d'interférence.

#### • Note

Des outils ont été développés pour calculer les amplitudes à N-points dans l'approximation à une boucle, outils fondés sur l'unitarité et la connaissance des différentes coupures des diagrammes (voir, par exemple C. F. Berger, Z. Bern, L. J. Dixon *et al.*, Phys. Rev. **D78** (2008) 036003 [arXiv:08034180].)

9. T. Kinoshita, J. Math. Phys. **3** (1962) 650.