

Chapitre 12

Equations du groupe de renormalisation

Les équations du groupe de renormalisation sont obtenues de la façon suivante : on écrit la relation entre la fonction de Green exprimée en fonction des quantités "nues" et celle exprimée en fonction des quantités renormalisées. Imposant que la fonction de Green "nue" ne dépend pas du paramètre de masse introduit lors de la renormalisation permet d'obtenir une équation d'évolution de la fonction de Green renormalisée. C'est en fait une généralisation de l'éq. (4.4). On verra que l'équation obtenue permet de prédire le comportement asymptotique des fonction de Green et par conséquent des amplitudes (après un certain nombre de manipulations!).

Pour une théorie avec un champ ϕ , la relation entre champ nu et renormalisé dans un schéma R est :

$$\phi_B = Z^{\frac{1}{2}}(R)\phi_R. \quad (12.0.1)$$

Les champs renormalisés dans deux schémas R_1 et R_2 satisfont :

$$\phi_{R_2} = Z^{\frac{1}{2}}(R_2, R_1)\phi_{R_1}, \quad (12.0.2)$$

avec :

$$Z(R_2, R_1) = Z(R_2)/Z(R_1) \quad (12.0.3)$$

et on a la loi de composition évidente :

$$Z(R_3, R_1) = Z(R_3, R_2) * Z(R_2, R_1). \quad (12.0.4)$$

Il arrive cependant, que pour certains schémas de renormalisation, notamment les schémas MOM ("momentum subtraction scheme") ou ON ("on-shell subtraction scheme") pour une théorie massive où les facteurs Z dépendent de la masse, que le produit $Z(R_4, R_3) * Z(R_2, R_1)$ ne soit pas un élément du groupe c'est à dire qu'il n'existe pas de schéma R et R' tel que :

$$Z(R_4, R_3) * Z(R_2, R_1) = Z(R', R). \quad (12.0.5)$$

Le terme de "groupe" est donc abusif dans certains cas.

12.1 Equations du groupe de renormalisation

Nous dériverons les équations du "groupe de renormalisation" dans le cas où les contre-termes Z_i ne dépendent pas des masses mais uniquement du couplage et implicitement d'une l'échelle arbitraire introduite dans la procédure de renormalisation, ce qui est le cas dans les schémas MS ou \overline{MS} appliqués à QED ou QCD que nous allons considérer maintenant. Une fonction de Green avec n_F fermions massifs et n_B champs de jauge externes satisfait à :

$$G_B^{(n_F, n_B)}(p_i, g_B, m_B, \varepsilon) = Z_2^{n_F/2}(g, \varepsilon) Z_3^{n_B/2}(g, \varepsilon) G^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu), \quad (12.1.6)$$

où les p_i sont les impulsions externes. $G_B^{(n_F, n_B)}$ est la fonction de Green "nue" régularisée d'où sa dépendance en ε , et $G^{(n_F, n_B)}$ est la fonction de Green renormalisée qui dépend du couplage g et de la masse m renormalisées ainsi que du paramètre μ . Toutes les divergences sont contenues dans les contre-termes. Comme on a exclu toute dépendance en masse des facteurs Z ils ne peuvent dépendre explicitement de μ puisqu'ils sont sans dimension. Leur dépendance en μ est implicite, via la constante de couplage renormalisée g . Au lieu de travailler avec les fonctions G on travaille plutôt avec les fonctions de Green irréductibles à une particule que l'on dénote Γ . On peut montrer que dans ce cas la relations entre fonctions nues et renormalisées est :

$$\boxed{\Gamma_B^{(n_F, n_B)}(p_i, g_B, m_B, \varepsilon) = Z_2^{-n_F/2}(g, \varepsilon) Z_3^{-n_B/2}(g, \varepsilon) \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu).} \quad (12.1.7)$$

Γ_B est indépendante de l'échelle μ introduite en régularisation dimensionnelle, d'où :

$$0 = Z_2^{-n_F/2}(g, \varepsilon) Z_3^{-n_B/2}(g, \varepsilon) \left[\mu \frac{d}{d\mu} - \frac{n_B}{2} \frac{\mu}{Z_3} \frac{dZ_3}{d\mu} - \frac{n_F}{2} \frac{\mu}{Z_2} \frac{dZ_2}{d\mu} \right] \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu). \quad (12.1.8)$$

Mais la dérivée totale par rapport à μ de $\Gamma^{(n_F, n_B)}$ s'écrit explicitement :

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \varepsilon) = \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{dg}{d\mu} \frac{\partial}{\partial g} + \mu \frac{dm}{d\mu} \frac{\partial}{\partial m} \right] \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu). \quad (12.1.9)$$

Introduisant la fonction de Gell-Mann/Low déjà rencontrée :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu \frac{dg}{d\mu} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta(g, \varepsilon) = \beta(g) \quad (12.1.10)$$

et les dimensions anomales du fermion et du boson :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\mu}{Z_i} \frac{dZ_i}{d\mu} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_i(g, \varepsilon) = \gamma_i(g) \quad (12.1.11)$$

et finalement :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu}{m} \frac{dm}{d\mu} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_m(g, \varepsilon) = \gamma_m(g). \quad (12.1.12)$$

L'équation du groupe de renormalisation devient :

$$\boxed{\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m(g) m \frac{\partial}{\partial m} - n_B \gamma_3(g) - n_F \gamma_2(g) \right] \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu_0 e^{-t}) = 0,} \quad (12.1.13)$$

où on a introduit la variable $t = -\ln(\mu/\mu_0)$ avec μ_0 une échelle fixée. Pour les fonctions de Green $G^{(n_F, n_B)}$ définies comme produits chronologiques des champs qui satisfont l'éq. (12.1.6) on aura évidemment :

$$\boxed{\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m(g) m \frac{\partial}{\partial m} + n_B \gamma_3(g) + n_F \gamma_2(g) \right] G^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu_0 e^{-t}) = 0.} \quad (12.1.14)$$

On rappelle que cette forme des équations n'est valable que si les contre-terms ne dépendent pas explicitement des masses du modèle. Par exemple, elles ne seraient pas valables pour QED dans le schéma ON.

12.2 Calcul de la fonction β et des dimensions anomales

Les différentes fonctions β , γ_m et γ_i sont facilement calculables, dans l'approximation à une boucle, à partir des résultats des chapitres précédents. On donne ici une dérivation valable à tous les ordres de la théorie des perturbations. On calcule d'abord la fonction $\beta(g)$. Pour cela on rappelle la relation déjà introduite entre couplage nu et renormalisé :

$$g_B = Z_g(g, \varepsilon) \mu^\varepsilon g, \quad (12.2.15)$$

où le contre-terme est de la forme :

$$Z_g(g, \varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_g^{(n)}(g)}{\varepsilon^n} \quad (12.2.16)$$

avec $c_g^{(n)}(g)$ un polynome en g . Le couplage g_B étant indépendant de la variable μ on obtient la relation (cf éq. (4.4.129)) :

$$\beta(g, \varepsilon) \frac{d(gZ_g(g, \varepsilon))}{dg} + \varepsilon g Z_g(g, \varepsilon) = 0. \quad (12.2.17)$$

On recherche $\beta(g, \varepsilon)$ sous la forme $\beta(g, \varepsilon) = \beta(g) + \beta_1(g)\varepsilon + \dots$ que l'on injecte dans l'équation ci-dessus et on annule les coefficients des termes en puissance (positive, nulle ou négative) de ε . On trouve que seuls les deux premiers termes du développement de $\beta(g, \varepsilon)$ sont non nuls et que :

$$\beta_1(g) = -g; \quad \boxed{\beta(g) = g^2 \frac{dc_g^{(1)}(g)}{dg}}; \quad \frac{dc_g^{(n+1)}(g)}{dg} = \frac{dc_g^{(1)}(g)}{dg} \frac{d(gc_g^{(n)})}{dg}. \quad (12.2.18)$$

Une remarque importante est que la fonction β est entièrement donnée par le résidu au pôle simple du développement en $1/\varepsilon$ de $Z_g(g, \varepsilon)$ et, d'autre part, les résidus des pôles multiples sont calculables à partir du résidu au pôle simple.

On procède de la même façon pour les dimensions anomales. Si on écrit

$$Z_i = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_i^{(n)}(g)}{\varepsilon^n}, \quad (12.2.19)$$

et on injecte ce développement dans la définition de la dimension anormale il vient

$$\boxed{\gamma_i(g) = -\frac{1}{2}g \frac{dc_i^{(1)}(g)}{dg};} \quad \frac{1}{2}g \frac{dc_i^{(n+1)}}{dg} = \frac{1}{2}\beta(g) \frac{dc_i^{(n)}}{dg} - \gamma_i(g) c_i^{(n)}. \quad (12.2.20)$$

Comme la fonction β , la dimension anormale est entièrement donnée par le résidu au pôle simple du développement en $1/\varepsilon$ du contre terme $Z_i(g, \varepsilon)$ correspondant. Finalement pour γ_m on trouve (les notations sont évidentes) :

$$\boxed{\gamma_m(g) = g \frac{dc_m^{(1)}(g)}{dg}.} \quad (12.2.21)$$

• **Note**

En QED/QCD le développement perturbatif fait intervenir la carré de la constante de couplage g^2 ou, plutôt, $\alpha = g^2/4\pi$. Les contre-terme sont de la forme :

$$\boxed{Z_i = 1 + \sum_{n=1} \frac{c_i^{(n)}(\alpha)}{\varepsilon^n},} \quad (12.2.22)$$

et la relation entre couplage nu et renormalisée est notée :

$$\alpha_B = Z_\alpha \mu^{2\varepsilon} \alpha. \quad (12.2.23)$$

L'opérateur de dérivation est $\mu^2/d\mu^2$ au lieu de $\mu/d\mu$. Ainsi on définit les fonctions :

$$\beta(\alpha) = \mu^2 \frac{d\alpha}{d\mu^2}; \quad \gamma_i(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{Z_i} \frac{dZ_i}{d\mu^2}; \quad \gamma_m(\alpha) = \frac{\mu^2}{m^2} \frac{dm^2}{d\mu^2}, \quad (12.2.24)$$

et, par analogie avec le raisonnement précédent ($g \rightarrow \alpha, \mu \rightarrow \mu^2$), on en déduit facilement :

$$\boxed{\beta(\alpha) = \alpha^2 \frac{dc_\alpha^{(1)}(\alpha)}{d\alpha}; \quad \gamma_i(\alpha) = -\frac{1}{2} \alpha \frac{dc_i^{(1)}(\alpha)}{d\alpha}; \quad \gamma_m(\alpha) = \alpha \frac{dc_m^{(1)}(\alpha)}{d\alpha}.} \quad (12.2.25)$$

Explicitement, en QED au premier ordre, d'après les résultats du chapitre 3, on trouve (jauge de Feynman, N_L saveurs de leptons) :

$$\boxed{\beta(\alpha) = \frac{N_L}{3\pi} \alpha^2; \quad \gamma_3(\alpha) = -\frac{N_L}{3\pi} \alpha, \text{ photon}; \quad \gamma_2(\alpha) = -\frac{1}{4\pi} \alpha, \text{ fermion}; \quad \gamma_m(\alpha) = -\frac{3}{2\pi} \alpha,} \quad (12.2.26)$$

Pour QCD, des expressions similaires peuvent facilement être obtenues à partir des résultats du chapitre 8, par exemple pour N_F saveurs de quarks, on a :

$$\boxed{\beta(\alpha_s) = -\frac{33 - 2N_F}{12\pi} \alpha_s^2.} \quad (12.2.27)$$

• **Remarque**

En sec. 4.4, on avait donné une dérivation de la fonction β au premier ordre non trivial de la théorie des perturbations, qui reposait sur un développement tel que $1/(1+c\alpha) \sim 1 - c\alpha$. Dans la démonstration ci-dessus, valable à tous les ordres, on voit qu'il n'est pas nécessaire d'avoir recours à cette approximation.

12.3 Solution des équations du groupe de renormalisation

On cherche d'abord la solution générale de l'équation homogène¹ :

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m(g) m \frac{\partial}{\partial m} \right] \Gamma(p_i, g, m, \mu_0 e^{-t}) = 0 \quad (12.3.28)$$

Pour simplifier l'écriture on note l'opérateur de dérivation entre crochets dans l'équation ci-dessus par :

$$\mathcal{D} = -\frac{\partial}{\partial t} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m(g) m \frac{\partial}{\partial m}. \quad (12.3.29)$$

On rappelle que g et m sont les paramètres renormalisés à une échelle $t = 0$ particulière. On va voir que la dépendance en μ , ou de façon équivalente en t , de la fonction de Green renormalisée $\Gamma^{(n_F, n_B)}$ apparaît seulement implicitement par l'intermédiaire de deux fonctions $\bar{g}(t, g)$ et $\bar{m}(t, g, m)$ appelées respectivement couplage (ou charge) mobile ("running coupling") et masse mobile ("running mass"). La première est définie implicitement par :

$$t = \int_g^{\bar{g}(t, g)} \frac{dx}{\beta(x)} \quad (12.3.30)$$

et la deuxième est donnée par :

$$\bar{m}(t, g, m) = m \exp \left(\int_g^{\bar{g}(t, g)} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_m(x) \right) \quad (12.3.31)$$

Dérivant ces deux équations par rapport à t on obtient :

$$\frac{\partial \bar{g}(t, g)}{\partial t} = \beta(\bar{g}) \quad (12.3.32)$$

$$\frac{\partial \bar{m}(t, g, m)}{\partial t} = m \exp \left(\int_g^{\bar{g}(t, g)} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_m(x) \right) \frac{\partial \bar{g}(t, g)}{\partial t} \frac{\gamma_m(\bar{g})}{\beta(\bar{g})}$$

soit :

$$\frac{\partial \bar{m}(t, g, m)}{\partial t} = \bar{m}(t, g, m) \gamma_m(\bar{g}), \quad (12.3.33)$$

avec comme conditions initiales ($t = 0, \mu_0 = \mu$) :

$$\bar{g}(0, g) = g ; \quad \bar{m}(0, g, m) = m. \quad (12.3.34)$$

La charge mobile \bar{g} et la masse mobile \bar{m} satisfont à une équation différentielle en t avec la condition initiale d'être respectivement égales à la charge g et la masse m renormalisées au point $t = 0$. Si on dérive maintenant l'éq. (12.3.30) par rapport à g il vient :

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial g} \frac{1}{\beta(\bar{g})} - \frac{1}{\beta(g)} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{g}}{\partial t} = \beta(g) \frac{\partial \bar{g}}{\partial g} \quad (12.3.35)$$

1. L.V. Ovsyannikov, Doklady Akademii Nauk SSSR 01/1956

qui exprime que \bar{g} ne dépend pas explicitement de t . On peut ré-écrire cette équation :

$$\boxed{\mathcal{D} \bar{g}(t, g) = 0}, \quad (12.3.36)$$

puisque \bar{g} ne dépend pas de m . De même pour la masse mobile :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{m}}{\partial g} &= \bar{m} \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial g} \frac{\gamma_m(\bar{g})}{\beta(\bar{g})} - \frac{\gamma_m(g)}{\beta(g)} \right) \\ &= \frac{\bar{m}}{\beta(g)} (\gamma_m(\bar{g}) - \gamma_m(g)), \end{aligned} \quad (12.3.37)$$

où on a utilisé l'éq. (12.3.36). Cette équation est équivalente à :

$$\boxed{\mathcal{D} \bar{m}(t, g, m) = 0}, \quad (12.3.38)$$

que l'on établit facilement à l'aide de (12.3.33) et de l'identité $\gamma_m \bar{m} = \gamma_m m (\partial \bar{m} / \partial m)$. La présence du terme en γ_m dans l'équation d'évolution de \bar{m} est due au fait que la masse a une dimension, alors qu'un tel terme est absent de l'évolution de \bar{g} . On note maintenant que toute fonction $\Gamma(p_i, \bar{g}(t, g), \bar{m}(t, g, m), \mu_0)$ (attention aux arguments!) de la charge et de la masse mobiles satisfait à l'équation (12.3.28). En effet :

$$\mathcal{D} \Gamma(p_i, \bar{g}(t, g), \bar{m}(t, g, m), \mu_0) = \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{g}} \mathcal{D} \bar{g} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{m}} \mathcal{D} \bar{m} = 0, \quad (12.3.39)$$

par les deux équations ci-dessus. De plus cette fonction est égale à $\Gamma(p_i, g, m, \mu_0)$ à $t = 0$.

• Solution de l'équation inhomogène

On la recherche sous la forme ;

$$\Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu_0 e^{-t}) = \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, \bar{g}, \bar{m}, \mu_0) \exp \left(-n_3 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_3(x) - n_2 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_2(x) \right). \quad (12.3.40)$$

On peut vérifier que cette fonction satisfait à :

$$(\mathcal{D} - n_2 \gamma_2(g) - n_3 \gamma_3(g)) \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu_0 e^{-t}) = 0 \quad (12.3.41)$$

qui est équivalente à l'éq. (12.1.13).

Preuve

$$\begin{aligned} (\mathcal{D} - n_i \gamma_i(g)) \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, \bar{g}, \bar{m}, \mu_0) \exp \left(-n_i \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_i(x) \right) = \\ \left\{ [\mathcal{D} \Gamma^{(n_F, n_B)}] - n_i \left\{ [\mathcal{D} \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_i(x)] + \gamma_i(g) \right\} \Gamma^{(n_F, n_B)} \right\} \exp \left(-n_i \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_i(x) \right). \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite est nul du fait de l'équation (12.3.39). Le deuxième terme entre $\{\dots\}$ est également nul puisque

$$\begin{aligned} [\mathcal{D} \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_i(x)] + \gamma_i(g) &= [\mathcal{D} \bar{g}] \frac{\gamma_i(\bar{g})}{\beta(\bar{g})} - [\mathcal{D} g] \frac{\gamma_i(g)}{\beta(g)} + \gamma_i(g) \\ &= -\gamma_i(g) + \gamma_i(g) \end{aligned} \quad (12.3.42)$$

car $\mathcal{D}\bar{g} = 0$ et $\mathcal{D}g = \beta(g)$. La relation (12.3.40) relie la fonction de Green renormalisée exprimée en fonction des paramètres renormalisés g, m à l'échelle $t = 0$ à la fonction de Green renormalisée (la même fonction) exprimée en fonction des paramètres $\bar{g}(t, g)$ et $\bar{m}(t, g, m)$ correspondant à l'échelle μe^t . On peut ainsi l'écrire :

$$\Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, g, m, \mu) = \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, \bar{g}, \bar{m}, \mu e^t) \exp \left(-n_3 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_3(x) - n_2 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_2(x) \right). \quad (12.3.43)$$

L'évolution des masse et couplage mobiles assure que les prédictions physiques ne dépendent pas du choix de t , c'est à dire du point de renormalisation.

12.4 Applications

Les équations RGE peuvent être utilisées pour prouver l'invariance des quantités physiques. Dans le cadre de notre discussion, nous travaillons dans les schémas MS ou \overline{MS} et l'arbitraire du schéma de renormalisation est paramétré par l'échelle μ . On retrouvera ainsi, de façon générale, divers résultats déjà obtenus de façon artisanale.

• Invariance de la masse physique, pôle du propagateur

On a vu que le propagateur renormalisé avait la forme, pour un fermion par exemple,

$$S_F^R(p, g, m, \mu) = \frac{i \mathcal{Z}^R}{\not{p} - m_{\text{pôle}} + i\epsilon}, \quad (12.4.44)$$

où (voir éq. (4.2.64) à (4.2.66) pour QED) $m_{\text{pôle}} = m_R(1 + \Sigma_0^R)$ est ce qui reste, dépendant de μ , après le choix des contre-termes de fonction d'onde et de masse, et $\mathcal{Z}^R = 1 + \Sigma_1^R$ est le résidu au pôle. On a :

$$\mathcal{D} S_F^R = \frac{i \mathcal{D} \mathcal{Z}^R}{\not{p} - m_{\text{pôle}} + i\epsilon} + \frac{i \mathcal{Z}^R \mathcal{D} m_{\text{pôle}}}{(\not{p} - m_{\text{pôle}} + i\epsilon)^2} \quad (12.4.45)$$

Mais le propagateur satisfait à une équation de type (12.1.14) :

$$[\mathcal{D} + 2\gamma_2(g)] S_F^R = 0. \quad (12.4.46)$$

Substituant à $\mathcal{D} S_F^R$ dans l'éq. (12.4.45) son expression donnée par (12.4.46) on voit que le membre de gauche de (12.4.45) est un pôle simple. Égalant les résidus des pôles du même ordre, on obtient pour le pôle simple :

$$[\mathcal{D} + 2\gamma_2(g)] \mathcal{Z}^R = 0. \quad (12.4.47)$$

et pour le pôle double :

$$\boxed{\mathcal{D} m_{\text{pôle}} = 0}, \quad (12.4.48)$$

qui est le résultat recherché. On note dans la suite cette masse " m_{phys} ", puisque, par définition, le pôle du propagateur est la masse physique de la particule. Cela est justifié parcequ'elle est indépendante du schéma de renormalisation.

• **Invariance des amplitudes de diffusion**

On considère pour simplifier la fonction de Green à n -points d'une théorie scalaire renormalisée dans le schéma R , soit $G^{(n)}(p_i, g, m, \mu)$ qui satisfait donc à l'équation de type :

$$[\mathcal{D} + n \gamma_2(g)] G^{(n)} = 0 \quad (12.4.49)$$

L'élément de matrice de diffusion s'obtient en tronquant la fonction de Green des propagateurs externes :

$$\mathcal{M}(p_i, g, m, \mu) = \lim_{p_i^2 \rightarrow m_{\text{phys}}^2} \prod_i^n \left(\frac{p_i^2 - m_{\text{phys}}^2}{i \mathcal{Z} \mathcal{R}} \right) \mathcal{Z}^{\mathcal{R}^{n/2}} G^{(n)}(p_i, g, m, \mu). \quad (12.4.50)$$

On montre facilement par application des équations (12.4.47), (12.4.49) et prenant note de l'invariance de la masse physique sous l'opérateur \mathcal{D} que :

$$\mathcal{D} \mathcal{M}(p_i, g, m, \mu) = \mu \frac{d \mathcal{M}(p_i, g, m, \mu)}{d \mu} = 0, \quad (12.4.51)$$

et donc que l'élément de matrice est indépendant de l'échelle arbitraire μ . D'autre part, il satisfait l'équation homogène de type (12.3.28). Si le calcul de cet élément dans un schéma de renormalisation avec couplage et masse définis à l'échelle μ , s'écrit $\mathcal{M}(p_i, g, m, \mu)$, alors son expression dans un schéma à l'échelle μe^t sera la même fonction mais avec couplage et masse mobiles (voir la discussion après l'éq. (12.3.42)), $\mathcal{M}(p_i, \bar{g}(t, g), \bar{m}(t, g, m), \mu e^t)$.

• **Où il est question de jauge**

Dans toute la discussion précédente on a omis le fait que les fonctions de Green pouvaient dépendre du paramètre de jauge ξ normalisant le terme de cassure de jauge $-(\partial^\mu A_\mu)^2/2\xi$ dans la densité lagrangienne. On peut prouver, dans les schémas de type MS ou \overline{MS} , l'indépendance de jauge de la fonction β . On exprime que le couplage nu, $g_B = \mu^\varepsilon Z_g g$, est indépendant de ξ , ce qui permet d'écrire

$$\frac{d Z_g}{d \xi} g + Z_g \frac{d g}{d \xi} = 0. \quad (12.4.52)$$

Injectant dans cette relation le développement en $1/\varepsilon$ de Z_g dans un schéma de type MS :

$$Z_g = 1 + \frac{a_1(g, \xi)}{\varepsilon} + \frac{a_2(g, \xi)}{\varepsilon^2} + \dots, \quad (12.4.53)$$

et égalant les termes constant d'une part, et les résidus aux différents pôles d'autre part, on trouve :

$$\boxed{\frac{d g}{d \xi} = 0} \quad \frac{d a_1(g, \xi)}{d \xi} = 0. \quad (12.4.54)$$

Le couplage g est donc indépendant du paramètre ξ et, par conséquent $\beta(g) = \mu dg/d\mu$ l'est aussi. On prouve de la même façon l'indépendance des $\gamma_i(g)$ et $\gamma_m(g)$.

12.5 Comportement asymptotique des fonctions de Green

La discussion précédente permet d'obtenir l'évolution des fonctions de Green lorsque l'on modifie l'échelle de renormalisation μ . On va voir que ce résultat peut être utilisé pour obtenir le comportement d'une fonction de Green, dans un schéma de renormalisation fixé, quand on dilate toutes les impulsions du processus considéré par un même facteur $p_i \rightarrow \lambda p_i$. C'est à dire que l'on va relier $\Gamma^{(n)}(\lambda p_i, \dots, \mu)$ à $\Gamma^{(n)}(p_i, \dots, \mu)$. Pratiquement, ce résultat est très intéressant puisque cela permet de faire des prédictions pour de nombreux processus. Par exemple, le processus $e^+ e^- \rightarrow \text{hadrons}$ où plutôt $\gamma^* \rightarrow \text{hadrons}$ est donné par la partie imaginaire de $\Gamma^{(n_F=0, n_B=2)}(q, g, \mu)$ et on pourra obtenir son comportement quand $q^2 \rightarrow \infty$. La diffusion inélastique profonde implique la fonction $\Gamma^{(n_F=2, n_B=2)}(p, q, g, \mu)$ où p est l'impulsion du parton et q celle du photon virtuel entrants : on pourra alors étudier son comportement quand $p \rightarrow \lambda p$, $q \rightarrow \lambda q$, c'est à dire quand $pq \rightarrow \lambda^2 pq$, $q^2 \rightarrow \lambda^2 q^2$ tels que la variable de Bjorken $x = -q^2/2pq$ est fixée, ce qui est le cas dans les expériences.

Les fonctions de Green sont des fonctions homogènes de degré, exprimé en masse, D . C'est à dire, si on mesure toutes les quantités dimensionnées (impulsions, masses) par rapport à l'échelle μ on a

$$\Gamma^{(n_F, n_B)}(\lambda p_i, m, g, \mu) = \mu^D \gamma^{(n_F, n_B)}\left(\lambda \frac{p_i}{\mu}, \frac{m}{\mu}, g\right), \quad (12.5.55)$$

qui explicite la dimension en masse de $\Gamma^{(n_F, n_B)}$, la fonction $\gamma^{(n_F, n_B)}$ étant sans dimension puisque toutes ses variables le sont. En dérivant par rapport à λ on a :

$$\lambda \frac{\partial \gamma^{(n_F, n_B)}}{\partial \lambda} = \lambda \frac{p_i}{\mu} \frac{\partial \gamma^{(n_F, n_B)}}{\partial (\lambda p_i / \mu)}, \quad (12.5.56)$$

et par rapport à μ :

$$\mu \frac{\partial \gamma^{(n_F, n_B)}}{\partial \mu} = - \left(\lambda \frac{p_i}{\mu} \frac{\partial}{\partial (\lambda p_i / \mu)} + \frac{m}{\mu} \frac{\partial}{\partial (m / \mu)} \right) \gamma^{(n_F, n_B)} \quad (12.5.57)$$

Combinant les deux équations on obtient :

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + m \frac{\partial}{\partial m} \right) \gamma^{(n_F, n_B)} = 0, \quad (12.5.58)$$

qui relie la variation en λ , facteur de changement d'échelle, à celle en μ . Revenant à la fonction de Green $\Gamma^{(n_F, n_B)}$ on a :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \Gamma^{(n_F, n_B)}(\lambda p_i, m, g, \mu) &= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma^{(n_F, n_B)} = \mu^D \left(D + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \gamma^{(n_F, n_B)} \\ &= \left(D - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - m \frac{\partial}{\partial m} \right) \Gamma^{(n_F, n_B)} \end{aligned} \quad (12.5.59)$$

Combinant cette dernière équation avec l'équation du groupe de renormalisation (12.1.13) pour éliminer le terme en $\mu \partial / \partial \mu$ on a finalement :

$$\boxed{\left[-\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + (\gamma_m(g) - 1) m \frac{\partial}{\partial m} - n_B \gamma_3(g) - n_F \gamma_2(g) + D \right] \Gamma^{(n_F, n_B)}(\lambda p_i, g, m, \mu) = 0,} \quad (12.5.60)$$

qui est l'équation recherchée. On peut la résoudre comme on l'a fait précédemment pour l'éq. (12.1.13) ou bien se rappeler la solution éq. (12.3.43) :

$$\Gamma^{(n_F, n_B)}(e^t p_i, g, m, \mu) = \Gamma^{(n_F, n_B)}(e^t p_i, \bar{g}, \bar{m}, \mu e^t) \exp \left(-n_3 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_3(x) - n_2 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_2(x) \right). \quad (12.5.61)$$

et utilisant la propriété de $\Gamma^{(n_F, n_B)}$ sous la dilatation des impulsions et des masses :

$$\Gamma^{(n_F, n_B)}(e^t p_i, g, m, \mu) = \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, \bar{g}, \bar{m}, \mu) \exp \left(t D - n_3 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_3(x) - n_2 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_2(x) \right), \quad (12.5.62)$$

où $\bar{m} = e^{-t} m$, qui relie la fonction de Green définie dans le même schéma de renormalisation mais évaluée à des valeurs des impulsions différentes. On note que pour une théorie de masse nulle est sans interaction on a simplement :

$$\Gamma^{(n_F, n_B)}(e^t p_i, \mu) = e^{tD} \Gamma^{(n_F, n_B)}(p_i, \mu), \quad (12.5.63)$$

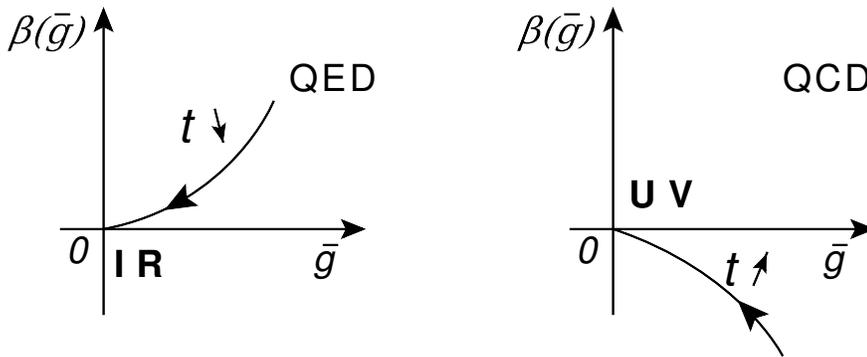
mais pour une théorie renormalisable avec interaction la dimension de la fonction est affectée et on a :

$$t D \rightarrow t D - n_3 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_3(x) - n_2 \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma_2(x), \quad (12.5.64)$$

d'où le nom de *dimension anormale* donnée aux fonction $\gamma_i(g)$. Cette modification du comportement vient de la nécessité d'introduire une échelle de masse dans la procédure de renormalisation. Le comportement asymptotique des fonctions de Green est contrôlé par la fonction $\beta(g)$, donc le couplage mobile, et les fonctions $\gamma_i(g)$.

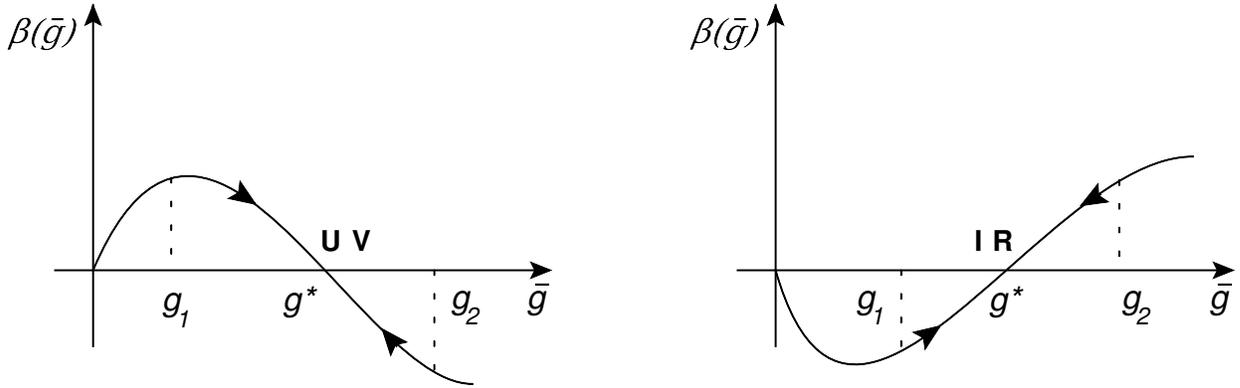
12.6 Comportement asymptotique du couplage mobile

Se reportant à l'éq. (12.3.32) qui donne l'évolution du couplage mobile en fonction de l'échelle on voit que, si $\beta(\bar{g})$ (qui est proportionnel à une puissance du couplage) est positif comme c'est le cas en QED, le couplage croît avec t tandis qu'il décroît dans le cas contraire, comme en QCD par exemple. Au premier ordre de la théorie des perturbations, valable quand le couplage est petit, on peut donc tracer les graphes suivants, $\beta(\bar{g})$ en fonction de \bar{g} qui indique également le sens de variation du couplage quand l'échelle varie.



On voit qu'en QED, \bar{g} décroît quand t décroît et tend asymptotiquement vers 0 : $g = 0$ est un point fixe dans l'infrarouge car la dérivée du couplage tend vers 0 quand $t \rightarrow -\infty$ et donc le couplage devient constant (nul). En revanche en QCD, $g = 0$ est un point fixe ultraviolet puisque le couplage et sa dérivée tendent vers 0 quand $t \rightarrow \infty$

Pour étudier le comportement de la fonction $\beta(\bar{g})$ lorsque le couplage devient grand, il faut aller aux ordres plus élevés de la théorie des perturbations. Si la fonction croît ou décroît de façon monotone le couplage devient éventuellement trop grand (cas de QCD dans l'infrarouge et QED aux énergies plus que cosmologiques) et la théorie des perturbations cesse d'être valable. Dans certains modèles les cas dans les figures ci-dessous peuvent se produire où la fonction $\beta(\bar{g})$ s'annule pour une valeur g^* :



Dans la figure de gauche g^* est un point fixe ultraviolet puisque, quelque soit le point de départ de l'évolution, g_1 ou g_2 , un accroissement de l'échelle t conduit le couplage effectif au point g^* , tandis que l'origine est un point fixe infrarouge. Pour la figure de droite, le même raisonnement montre que g^* est un point fixe infrarouge et l'origine un point fixe ultraviolet.

12.7 Violation d'invariance d'échelle

Se tournant maintenant vers l'étude d'une fonction de Green, on considère pour simplifier une fonction d'un seul champ de masse nulle (voir éq. (12.5.62)) :

$$\Gamma^{(n)}(e^t p_i, g, \mu) = \Gamma^{(n)}(p_i, \bar{g}, \mu) \exp \left(t D - n \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma(x) \right), \quad (12.7.65)$$

Après intégration de l'éq. (12.3.32) on peut écrire :

$$\begin{aligned} t D - n \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)} \gamma(x) &= t D - n \int_0^t dt' \gamma(\bar{g}(t')) \\ &= t (D - n \gamma(g^*)) - n \int_0^t dt' [\gamma(\bar{g}(t')) - \gamma(g^*)], \end{aligned} \quad (12.7.66)$$

où on a introduit la valeur de la dimension anormale au point fixe g^* . Plusieurs cas sont possibles.

- $\gamma(g^*) = 0$ et $\int_0^t dt' [\gamma(\bar{g}(t')) - \gamma(\bar{g}^*)]$ est fini quand $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}(e^t p_i, g, \mu) &\sim \Gamma^{(n)}(p_i, \bar{g}, \mu) e^{tD} \\ &\sim \Gamma^{(n)}(p_i, \bar{g}, \mu) \lambda^D, \end{aligned} \quad (12.7.67)$$

et on retrouve la loi de dilatation naïve qui n'est donc pas modifiée par l'interaction, le facteur $\int_0^t dt' [\gamma(\bar{g}(t')) - \gamma(\bar{g}^*)]$ ne contribuant pas à la dépendance en t ;

- $\gamma(g^*) = 0$ et $\int_0^t dt' [\gamma(\bar{g}(t')) - \gamma(\bar{g}^*)]$ est non borné quand $t \rightarrow \infty$. Un cas typique est QED dans l'infrarouge ou QCD dans l'ultraviolet. Par exemple on a :

$$\gamma(\bar{g}) = \gamma_0 \bar{g}^2, \quad \beta(\bar{g}) = \beta_0 \bar{g}^3 \quad (12.7.68)$$

d'où

$$\int_0^t dt' [\gamma(\bar{g}(t')) - \gamma(\bar{g}^*)] = \frac{\gamma_0}{\beta_0} \int_g^{\bar{g}} \frac{dg'}{g'} = \frac{\gamma_0}{\beta_0} \ln \frac{\bar{g}}{g}, \quad (12.7.69)$$

et l'on a donc :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}(e^t p_i, g, \mu) &= \Gamma^{(n)}(p_i, \bar{g}, \mu) e^{tD - n \frac{\gamma_0}{\beta_0} \ln \frac{\bar{g}}{g}} \\ &= \Gamma^{(n)}(p_i, \bar{g}, \mu) e^{tD} \left(\frac{\bar{g}}{g} \right)^{-n \frac{\gamma_0}{\beta_0}} \end{aligned} \quad (12.7.70)$$

et on a une violation logarithmique de la loi d'échelle naïve puisque $\bar{g}^2/g^2 = (1 - 2\beta_0 g^2 t)^{-1}$. C'est le comportement que l'on avait obtenu pour la fonction de structure de l'inélastique profond (voir éqs. (9.1.17) et/ou (9.1.32)) dans le cadre du modèle des partons ;

- $\gamma(g^*) \neq 0$: on a alors :

$$\Gamma^{(n)}(e^t p_i, g, \mu) \sim \Gamma^{(n)}(p_i, \bar{g}, \mu) e^{tD + n\gamma(g^*)}, \quad (12.7.71)$$

et dans ce cas, on a une violation en puissance de la loi naïve de dilation accompagnée ou non d'une violation logarithmique selon la valeur de l'intégrale $\int_0^t dt' [\gamma(\bar{g}(t')) - \gamma(\bar{g}^*)]$.

L'approche ci-dessus est utilisée pour étudier la violation d'invariance d'échelle des fonctions de structure dans la diffusion inélastique profonde : c'est une alternative à l'approche fondée sur le modèle des partons naïf présentée dans le chapitre précédent mais elle est beaucoup plus rigoureuse mais également plus lourde à mettre en œuvre. On part de la transformée de Fourier de la fonction $W_{\mu\nu}(P, q)$ (produit de courants hadroniques) définie en sec. (6.2.2) que l'on développe en produits d'opérateurs sur le cône de lumière : les coefficients de ce développement sont les "coefficients de Wilson" susceptibles d'un traitement perturbatif via les équations du groupe de renormalisation tandis que les opérateurs contiennent la partie non-perturbative (équivalent des distributions partoniques à Q_0^2). Il est intéressant de remarquer que si dans l'approche "modèle des partons naïf" la violation d'invariance d'échelle reflète la structure infra-rouge de la théorie, dans l'approche "groupe de renormalisation" cette même violation en est la conséquence du comportement ultraviolet. Comme ils disent à l'IN2P3, "les deux infinis" se rejoignent !