

Chapitre 2

Lagrangien QED, Règles de Feynman

Avant d'entrer dans le détail de l'interaction entre quarks et gluons nous allons faire quelques rappels sur l'électrodynamique quantique. Le principe de construction de la théorie, l'invariance de jauge, est le même dans les deux cas mais le cas abélien de QED est beaucoup plus simple à écrire que le cas non abélien de QCD. Le comportement asymptotique (infra-rouge et ultra-violet) des deux théories est cependant complètement différent.

Toute la physique perturbative est contenue dans la densité lagrangienne, $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$, une fonction des champs $\phi(x)$ et de leurs premières dérivées, à partir de laquelle on construit l'action :

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)).$$

L'action est une quantité sans dimension. Si on impose que l'action est stationnaire sous une variation du champ (principe de Maupertuis), on obtient les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi(x)} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi(x)} = 0$$

qui décrivent l'évolution classique du champ $\phi(x)$. C'est à partir de ces équations, qu'en formalisme de la seconde quantification, on obtient les règles de Feynman qui permettent de calculer perturbativement n'importe quel processus en théorie des champs.

2.1 Invariance de jauge et le Lagrangien QED

Pour QED, on part d'un spineur de Dirac massif $\psi(x)$ et du lagrangien libre

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi$$

avec les conventions $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial / \partial x_\mu = \partial_\mu \gamma^\mu$, et les matrices (4×4) γ_μ définies par

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1.1)$$

où les σ_i sont les matrices de Pauli. On a les propriétés suivantes :

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu,\nu} \mathbf{1}_4, \quad \gamma_0 = \gamma_0^\dagger \gamma_0, \quad \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 = \gamma_\mu. \quad (2.1.2)$$

D'autres propriétés des matrices γ_μ sont données en appendice. L'équation d'Euler-Lagrange obtenue en variant l'action S par rapport à $\bar{\psi}$ est :

$$(i \not{\partial} - m)\psi = 0, \quad (2.1.3)$$

et celle par rapport à ψ est :

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0. \quad (2.1.4)$$

Ces deux équations sont équivalentes car la première peut être obtenue à partir de la seconde en prenant l'hermitienne conjuguée et en multipliant à droite par γ^0 .

• Invariance par changement de phase globale

On voit que la physique ne dépend pas de la phase du champ ψ puisque le lagrangien \mathcal{L} est invariant sous la transformation globale suivante :

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow e^{i\alpha}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x), \end{aligned}$$

où α est une constante réelle arbitraire, indépendante du point x . Ceci est une transformation de jauge rigide ou de première espèce. D'après le théorème de Noether, à toute invariance sous une famille continue de transformations de ce type correspond un courant conservé dont la forme est obtenue en partant des transformations infinitésimales de ψ et $\bar{\psi}$ (α arbitraire, $\alpha \ll 1$) :

$$\begin{aligned} \delta\psi &= i\alpha\psi \\ \delta\bar{\psi} &= -i\alpha\bar{\psi}. \end{aligned}$$

La variation correspondante du lagrangien est

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi}\delta\psi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\psi}\partial_\mu\delta\psi + \delta\bar{\psi}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\bar{\psi}} + \partial_\mu\delta\bar{\psi}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\bar{\psi}},$$

où on a utilisé la définition $\delta\partial_\mu\psi = \partial_\mu\delta\psi$ au numérateur. Le dernier terme est nul (pas de dépendance en $\partial_\mu\bar{\psi}$ de \mathcal{L}) ainsi que l'avant dernier (le coefficient de $\delta\bar{\psi}$ est l'équation du mouvement). Utilisant Euler-Lagrange, les deux premiers se combinent en

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\psi} \right) \delta\psi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\psi} \partial_\mu\delta\psi = \partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\psi} \delta\psi \right) = i\alpha\partial_\mu(i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi). \quad (2.1.5)$$

Puisque \mathcal{L} est invariant sous les transformations rigides, $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$, le courant J^μ associé à cette invariance,

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (2.1.6)$$

est conservé : ($\partial_\mu J^\mu = \partial_0 J^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$). On définit la charge $Q(t)$ associée à ce courant par :

$$\boxed{Q(t) = Q = \int d^3x J^0(t, \vec{x})}. \quad (2.1.7)$$

En effet, il est aisé de montrer qu'elle est constante dans le temps,

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{\Omega} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \int_{\partial\Omega} \vec{ds} \cdot \vec{J}(t, \vec{x}) = 0.$$

Pour obtenir la première égalité on utilise la conservation du courant, $\partial_0 J^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, et pour la dernière on suppose qu'il n'y a pas de charges à l'infini et que \vec{J} est à décroissance suffisamment rapide à l'infini.

• Invariance par changement de phase locale

On va maintenant refaire le même travail pour un paramètre α qui dépend de la coordonnée d'espace-temps, $\alpha \rightarrow \alpha(x)$, c'est-à-dire que l'on peut choisir arbitrairement la phase du champ ψ en chaque point de l'espace sans que cela affecte les prédictions physiques (transformation de jauge propre, ou de seconde espèce). Les transformations locales sont donc les suivantes

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-ie\alpha(x)}\bar{\psi}(x) \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

et, si le terme de masse reste invariant ($\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}'\psi'$), le terme cinétique ne l'est plus ($\bar{\psi}\partial_{\mu}\psi \neq \bar{\psi}'\partial_{\mu}\psi'$) à cause de l'action de la dérivée sur le paramètre $\alpha(x)$:

$$\partial_{\mu}\psi' = \partial_{\mu}(e^{ie\alpha(x)}\psi) = e^{ie\alpha(x)}\partial_{\mu}\psi + ie(\partial_{\mu}\alpha(x))\psi.$$

La variation du lagrangien prend donc la forme suivante :

$$\delta\mathcal{L} = -e\bar{\psi}(\partial_{\mu}\alpha(x))\gamma^{\mu}\psi,$$

qui n'est ni nulle ni une dérivée totale. On peut néanmoins rétablir cette invariance en introduisant un champ vecteur, $A_{\mu}(x)$, et en modifiant le lagrangien :

$$\mathcal{L} \rightarrow \bar{\psi}(x) (i(\partial_{\mu} - ieA_{\mu}(x))\gamma^{\mu} - m) \psi(x) \equiv \bar{\psi}(x) (iD_{\mu}\gamma^{\mu} - m) \psi(x),$$

où $D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}(x)$ est la dérivée covariante, dont la variation est $\delta(D_{\mu}\psi(x)) = ie\alpha(x)D_{\mu}\psi(x)$, par définition. Sous l'action d'un élément du groupe de jauge le champ $A_{\mu}(x)$ devient donc :

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\alpha(x).$$

Ainsi, sous une transformation infinitésimale, la variation du lagrangien est nulle, puisque la variation associée au champ de jauge compense celle due au fermion. Les équations du mouvement sont :

$$(i \not{\partial} - m)\psi(x) = \underbrace{-e \not{A}(x)\psi(x)}_{\text{terme d'interaction}} \quad (2.1.9)$$

$$e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi = 0. \quad (2.1.10)$$

où la deuxième équation résulte de la variation du champ A_{μ} . Physiquement, (2.1.10) impose soit $e = 0$ (pas de charge électrique), soit $\psi = 0$ (pas de champ fermionique)! On peut résoudre ce

problème si l'on ajoute à \mathcal{L} un terme dérivatif qui contient $\partial_\mu A_\nu$ et qui spécifie comment le champ de jauge se propage (terme cinétique). Pour préciser la forme de ce terme, nous allons utiliser le fait que l'action que nous voulons construire est censée être un scalaire de Lorentz, sans dimension et invariante de jauge. Il faut donc trouver un terme quadratique en $\partial_\mu A_\nu$, de dimension 4 (pour compenser la dimension de la mesure d'intégration d^4x qui vaut -4 en unités de masse, sachant que $[\partial_\mu A_\nu] = 2$), invariant de jauge et scalaire de Lorentz. On vérifie facilement que le terme $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ avec

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$$

invariant de jauge, satisfait à toutes les conditions énoncées ci-dessus. Ce terme n'est pas le seul candidat, mais les autres possibilités sont en désaccord avec nos exigences. Par exemple,

- $(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2$ est un scalaire de Lorentz, mais il est de dimension 8 : dans la densité lagrangienne il entrerait donc avec un couplage de dimension -4 (par exemple $(F \cdot F)^2/M^4$). Mais une théorie qui possède un couplage de dimension négative est non-renormalisable (voir sec. 4.6).
- $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ avec $\tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ ¹ satisfait à toutes les conditions énoncées plus haut, mais c'est un pseudo-scalaire qui viole la parité alors que QED la préserve. On peut aussi noter que ce terme ne résoud pas le problème (2.1.10) puisqu'il ne contribue pas aux équations de mouvement (terme topologique) : en fait il se réduit à une dérivée totale².

Finalement, \mathcal{L}_{QED} pour un champ ψ s'écrit

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi} \quad (2.1.11)$$

où le facteur $-\frac{1}{4}$ est choisi de manière à obtenir la normalisation habituelle pour la charge e . A priori, on aurait pu considérer un champ A^μ massif, mais il est facile de montrer qu'un terme de la forme $m^2 A_\mu A^\mu$ n'est pas invariant sous une transformation de jauge. C'est donc l'invariance de jauge qui impose un champ de jauge (photon) de masse nulle. Les équations du mouvement pour le photon sont :

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{QED}}}{\delta A_\nu(x)} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}_{\text{QED}}}{\delta\partial_\mu A_\nu(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu)A_\mu(x) = eJ^\nu(x),$$

qui peuvent aussi s'écrire $\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = eJ^\nu(x)$, ce qui requiert, par cohérence, la conservation du courant puisque $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ ($F^{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique). Finalement les équations d'Euler-Lagrange pour QED sont :

$$\boxed{\begin{aligned} (i\not{D} - m)\psi &= 0 & \Leftrightarrow & (i\not{\partial} - m)\psi = -e\not{A}(x)\psi(x) \\ \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) &= eJ^\nu(x) & \Leftrightarrow & \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) \end{aligned}} \quad (2.1.12)$$

Il faut rajouter aussi à ces équations

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}(x) = 0 \quad (2.1.13)$$

qui est évidente d'après la définition de $\tilde{F}^{\mu\nu}$.

1. Le tenseur $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ totalement antisymétrique en ses indices est défini par $\epsilon^{0123} = 1$. On a donc $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.
2. $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\rho A_\sigma) = 4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu(A_\nu\partial_\rho A_\sigma) - 4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma$ où on a fait une intégration par partie. Le dernier terme est évidemment nul puisque il y a contraction d'un tenseur antisymétrique en $\mu\rho$ avec un tenseur symétrique en ces mêmes indices.

Remarques :

Une forme utile pour le tenseur électromagnétique est

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{e}[D_\mu, D_\nu], \quad (2.1.14)$$

une définition qui s'avèrera pratique pour QCD.

Introduisant les champs électrique et magnétique \vec{E}, \vec{B} , on peut écrire :

$$F^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice : Démontrer que

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}(x) = 0 &\Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && \text{éqs. de Maxwell homogènes} \\ \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = eJ^\nu(x) &\Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \varphi, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} && \text{éqs. de Maxwell inhomogènes.} \end{aligned}$$

où le courant covariant est $J^\mu(x) = (\varphi, \vec{j})$.

2.2 Le spineur de Dirac libre

On recherche les solutions de l'équation de Dirac libre ($e = 0$) sous forme d'ondes planes et on introduit

$$\begin{aligned} \psi_k^+(x) &= e^{-ik \cdot x} u(k) \\ \psi_k^-(x) &= e^{+ik \cdot x} v(k) \end{aligned} \quad \text{avec } k \cdot x = \omega_k x_0 - \vec{k} \cdot \vec{x}, \quad \omega_k = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$$

$u(k), v(k)$ sont les spineurs de Dirac à 4 composantes que l'on va définir. L'action de l'opérateur $i\partial_\mu \equiv i\partial/\partial x^\mu$, agit seulement sur la phase

$$i \partial_\mu e^{\pm ik \cdot x} = \mp k_\mu e^{\pm ik \cdot x}$$

L'équation de Dirac libre devient alors

$$\begin{aligned} (\not{k} - m) u(k) &= 0 \\ (\not{k} + m) v(k) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

On considère le cas au repos : $k_\mu = (m, \vec{0})$. On obtient alors

$$\begin{aligned} (\not{k} - m)u(k) = 0 &\Rightarrow 2m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} u = 0 \\ (\not{k} + m)v(k) = 0 &\Rightarrow 2m \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0. \end{aligned}$$

Le spineur $\psi_k^+(x)$ correspond aux solutions d'énergie positive (phase $e^{-ik \cdot x}$) et les spineurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

forment une base des solutions de l'équation de Dirac correspondante. u_1, u_2 représentent les deux états de spin possibles du spineur. $\psi_k^-(x)$ correspond aux solutions d'énergie négative (phase $e^{ik \cdot x}$) et les spineurs v correspondants sont

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, relâchant la condition $\vec{k} = 0$, les spineurs

$$u_\alpha(k) \propto (\not{k} + m)u_\alpha$$

sont, à un facteur de normalisation près, les deux solutions de Dirac d'énergie positive puisque

$$(\not{k} - m)u_\alpha(k) \equiv (k^2 - m^2)u_\alpha = 0$$

par condition de couche de masse

$$\not{k} \not{k} = \frac{1}{2} k^\mu k^\nu \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = k^2 = m^2$$

et

$$v_\alpha(k) \propto (\not{k} - m)v_\alpha$$

sont les solutions d'énergie négative car

$$(\not{k} + m)v_\alpha(k) = (k^2 - m^2)v_\alpha = 0.$$

On peut définir les projecteurs d'énergie

$$\Lambda_+ = \frac{\not{k} + m}{2m}, \quad \Lambda_- = -\frac{\not{k} - m}{2m} \quad (2.2.16)$$

qui satisfont

$$\Lambda_+^2 = \Lambda_+, \quad \Lambda_-^2 = \Lambda_-, \quad \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = 0 \\ \Lambda_+ + \Lambda_- = \mathbf{1}_4$$

Exercice : Démontrer les propriétés ci-dessus.

Le développement en ondes planes d'une solution générale de l'équation de Dirac s'écrit

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left(b_{\alpha}(k) \psi_k^{+\alpha}(x) + d_{\alpha}^{\dagger}(k) \psi_k^{-\alpha}(x) \right) \quad (2.2.17)$$

avec

$$\begin{aligned} \psi_k^{+\alpha}(x) &= e^{-ik \cdot x} u_{\alpha}(k) \\ \psi_k^{-\alpha}(x) &= e^{ik \cdot x} v_{\alpha}(k), \end{aligned} \quad \omega_k = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2} \quad (2.2.18)$$

où :

- $\int d^3k/2\omega_k = \int d^4k \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2)$ est l'élément d'intégration invariant
- $b_{\alpha}(k), d_{\alpha}^{\dagger}(k)$ sont en physique classique les coefficients de la superposition linéaire
- on utilise parfois la normalisation m/ω_k au lieu de $1/2\omega_k$ dans l'intégrant définissant $\psi(x)$.

Il est nécessaire de normaliser les spineurs solutions de l'équation de Dirac libre. une possibilité est³ :

$$\begin{aligned} u_{\alpha}(k) &= \frac{1}{\sqrt{m + \omega_k}} (\not{k} + m) u_{\alpha} \\ v_{\alpha}(k) &= \frac{1}{\sqrt{m + \omega_k}} (-\not{k} + m) v_{\alpha}, \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

ou, de façon équivalente,

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\alpha}(k) &= \frac{1}{\sqrt{m + \omega_k}} \bar{u}_{\alpha}(\not{k} + m) \\ \bar{v}_{\alpha}(k) &= \frac{1}{\sqrt{m + \omega_k}} \bar{v}_{\alpha}(-\not{k} + m). \end{aligned}$$

On obtient alors les conditions de normalisation :

$\begin{aligned} \bar{u}_{\alpha}(k) u_{\beta}(k) &= 2m \delta_{\alpha\beta} \\ \bar{v}_{\alpha}(k) v_{\beta}(k) &= -2m \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$	$\bar{u}_{\alpha}(k) v_{\beta}(k) = \bar{v}_{\alpha}(k) u_{\beta}(k) = 0$	(2.2.20)
---	---	----------

Démonstration :

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\alpha}(k) u_{\beta}(k) &= \frac{1}{m + \omega_k} \bar{u}_{\alpha}(\not{k} + m)^2 u_{\beta} \\ &= \frac{2m}{m + \omega_k} \bar{u}_{\alpha}(m + \omega_k \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma}) u_{\beta} \end{aligned}$$

Le terme en $\vec{k} \cdot \vec{\gamma}$ ne contribue pas puisqu'il est anti-diagonal et que les deux derniers éléments du $u_{\alpha, \beta}$ sont toujours nuls. De plus la forme de la matrice γ^0 permet d'écrire

$$\bar{u}_{\alpha}(k) u_{\beta}(k) = \frac{2m}{m + \omega_k} (m + \omega_k) u_{\alpha}^T u_{\beta} = 2m \delta_{\alpha\beta}$$

3. En association avec le facteur de normalisation m/ω_k dans l'éq. (2.2.17) on utilise, dans certains livres, la définition $u_{\alpha}(k) = (\not{k} + m) u_{\alpha} / \sqrt{2m(m + \omega_k)}$. L'éq. (2.2.20) devient alors $\bar{u}_{\alpha}(k) u_{\beta}(k) = \delta_{\alpha\beta}, \bar{v}_{\alpha}(k) v_{\beta}(k) = -\delta_{\alpha\beta}$.

On prouve de même

$$\bar{u}_\alpha(k)v_\beta(k) \approx \bar{u}_\alpha(\not{k} + m)(\not{k} - m)v_\beta = 0$$

Exercice : Montrer que

$$\begin{aligned} u_\alpha^\dagger(k) u_\beta(k) &= 2\omega_k \delta_{\alpha\beta} \\ v_\alpha^\dagger(k) v_\beta(k) &= 2\omega_k \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

On remarque que $\bar{u}_\alpha(k)u_\beta(k) = 2m\delta_{\alpha\beta}$ est un scalaire sous une transformation de Lorentz alors que $u_\alpha^\dagger(k)u_\beta(k) = 2\omega_k \delta_{\alpha\beta}$ ne l'est pas puisqu'il se transforme comme une énergie. On prouve maintenant une relation concernant la matrice formée par $\sum_{\alpha=1}^2 u_\alpha(k)\bar{u}_\alpha(k)$. On remarque d'abord par inspection que :

$$\sum_{\alpha=1}^2 u_\alpha \bar{u}_\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma^0), \quad \sum_{\alpha=1}^2 v_\alpha \bar{v}_\alpha = -\frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma^0)$$

et par suite

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^2 u_\alpha(k) \bar{u}_\alpha(k) &= \frac{1}{(m + \omega_k)}(\not{k} + m) \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma^0)(\not{k} + m) \\ &= \frac{1}{(m + \omega_k)} \frac{1}{2}(2m(\not{k} + m) + (\not{k} + m)\gamma^0(\not{k} + m)). \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

On utilise alors la relation $\not{k}\gamma^0\not{k} = -m^2\gamma^0 + 2\omega_k\not{k}$ pour factoriser $(m + \omega_k)$ au numérateur, d'où les relations très utiles et importantes,

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^2 u_\alpha(k)\bar{u}_\alpha(k) = \not{k} + m = 2m\Lambda_+,} \quad (2.2.23)$$

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^2 v_\alpha(k)\bar{v}_\alpha(k) = \not{k} - m = -2m\Lambda_-,} \quad (2.2.24)$$

valables avec la normalisation des spineurs choisie en éq. (2.2.19). La somme sur les états de polarisation des $u_\alpha\bar{u}_\alpha$, $v_\alpha\bar{v}_\alpha$ est proportionnelle aux projecteurs d'énergie positive et négative. Ces relations sont utilisées dans les calculs d'amplitude de diffusion avec fermions externes ainsi que dans la dérivation du propagateur du fermion.

• Quantification du champ de Dirac (rappels)

Dans le formalisme de la seconde quantification les coefficients b_α , d_α^\dagger deviennent des opérateurs agissant sur un espace de Fock à définir. La procédure de seconde quantification du champ de Dirac

consiste à imposer les relations d'anticommutation entre les coefficients $b_\alpha(k)$, $d_\alpha(k)$, $b_\alpha^\dagger(k)$, $d_\alpha^\dagger(k)$ du développement en ondes planes du champ de Dirac :

$$\boxed{\begin{aligned} \{b_\alpha(k), b_\beta^\dagger(q)\} &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(k - q) \\ \{d_\alpha(k), d_\beta^\dagger(q)\} &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(k - q) \\ \{b_\alpha, b_\beta\} &= \{d_\alpha, d_\beta\} = \{b_\alpha, d_\beta\} = \{b_\alpha, d_\beta^\dagger\} = 0 \end{aligned}} \quad (2.2.25)$$

Ceci permet d'écrire l'anticommutateur entre le champ $\psi(x)$ et son moment conjugué $\Pi(x) = \delta\mathcal{L}/\delta\partial_0\Psi(x) = i\psi^\dagger(x)$. En terme des composantes ψ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ l'anticommutateur à temps égal est :

$$\boxed{\{\psi_i(t, \vec{x}), \psi_j^\dagger(t, \vec{y})\} = \delta_{ij} \delta^{(3)}(x - y)} \quad (2.2.26)$$

On démontre d'abord la relation :

$$\boxed{\{\psi(t, \vec{x}), \bar{\psi}(t, \vec{y})\} = \gamma^0 \delta^{(3)}(x - y).} \quad (2.2.27)$$

dont l'éq. (2.2.26) est la conséquence immédiate.

Démonstration

Partant de la représentation éq. (2.2.17) pour $\psi(x)$ et pour $\bar{\psi}(y)$ de :

$$\bar{\psi}(y) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} \sum_{\beta=1}^2 \left(b_\beta^\dagger(q) \bar{u}_\beta(q) e^{iq \cdot y} + d_\beta(q) \bar{v}_\beta(q) e^{-iq \cdot y} \right)$$

l'anticommutateur à temps égal est :

$$\begin{aligned} \{\psi(t, \vec{x}), \bar{\psi}(t, \vec{y})\} &= \sum_{\alpha, \beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} \left(\{b_\alpha(k), b_\beta^\dagger(q)\} u_\alpha(k) \bar{u}_\beta(q) e^{-ik \cdot x + iq \cdot y} \right. \\ &\quad \left. + \{d_\alpha^\dagger(k), d_\beta(q)\} v_\alpha(k) \bar{v}_\beta(q) e^{ik \cdot x - iq \cdot y} \right) \end{aligned}$$

On anticommute uniquement les opérateurs création et annihilation et non les fonctions d'onde car il faut garder la structure matricielle de l'expression. Les relations d'anticommutation éqs. (2.2.25) permettent de faire l'intégrale $\int d^3q$, d'utiliser les formules éqs. (2.2.23), (2.2.24) et de contraindre les énergies $\omega_q = \omega_k$ de sorte que la composante en x_0 disparaît dans les facteurs exponentiels. On a alors :

$$\{\psi(t, \vec{x}), \bar{\psi}(t, \vec{y})\} = \sum_{\alpha} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left((k + m) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} + (k - m) e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right) \quad (2.2.28)$$

Faisant le changement de variable $\vec{k} = -\vec{k}$ dans le deuxième terme permet de compenser les composantes spatiales de \vec{k} . Utilisant alors :

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{\pm i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = \delta^{(3)}(x - y),$$

on obtient immédiatement le résultat recherché.

On peut également montrer les relations plus générales :

$$\boxed{\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = (i \not{\partial} - m) i \Delta(x - y) ; \quad \{\psi(x), \psi(y)\} = 0.} \quad (2.2.29)$$

avec la définition

$$i\Delta(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)} \right]. \quad (2.2.30)$$

On construit l'espace de Fock par application des b_α^\dagger , d_α^\dagger sur le vide avec la définition que les opérateurs b_α et d_α annihilent le vide :

$$b_\alpha(k)|0\rangle = d_\alpha(k)|0\rangle = 0; \quad \langle 0|b_\alpha^\dagger(k) = \langle 0|d_\alpha^\dagger(k) = 0 \quad \forall k, \alpha.$$

On a, par exemple, deux états à un fermion d'impulsion k et deux états à un anti-fermion :

$$b_\alpha^\dagger(k)|0\rangle, \quad d_\alpha^\dagger(k)|0\rangle, \quad \alpha = 1, 2.$$

A noter qu'à cause des relations d'anticommutation, on ne peut pas avoir deux fermions dans le même état physique (même impulsion, même polarisation). On peut définir la charge et l'hamiltonien. Par exemple la charge est définie par (voir éq. (2.1.7)) :

$$Q = : \int d^3x J^0(t, \vec{x}) : = : \int d^3x \psi^\dagger \psi :$$

en utilisant la forme du courant fermionique introduite à l'éq. (2.1.6). Introduisant le développement en ondes planes de ψ on trouve

$$Q = : \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_\alpha \left(b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) + d_\alpha(k) d_\alpha^\dagger(k) \right) :$$

où on a utilisé les relations de normalisation u_α^\dagger et de v_β . Le symbole $:\dots:$ s'appelle produit normal et implique que tous les opérateurs annihilation b_α , d_β soient à droite et les opérateurs création b_α^\dagger , d_β^\dagger soient à gauche. On doit changer les signes en anticommutant les opérateurs. Il vient alors

$$Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_\alpha \left[b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) - d_\alpha^\dagger(k) d_\alpha(k) \right]$$

On vérifie $Q|0\rangle = 0$ et le vide est bien de charge nulle. On prouve que :

$$\begin{aligned} [Q, b_\alpha(k)] &= -b_\alpha(k) & ; & \quad [Q, d_\alpha(k)] = +d_\alpha(k) \\ [Q, b_\alpha^\dagger(k)] &= +b_\alpha^\dagger(k) & ; & \quad [Q, d_\alpha^\dagger(k)] = -d_\alpha^\dagger(k) \end{aligned}$$

Utilisant ces relations d'anticommutation il est facile de voir et que

$$Q b_\alpha^\dagger|0\rangle = b_\alpha^\dagger|0\rangle, \quad Q d_\alpha^\dagger|0\rangle = -d_\alpha^\dagger|0\rangle, \quad (2.2.31)$$

on dira alors que $b_\alpha^\dagger|0\rangle$, respectivement $d_\alpha^\dagger|0\rangle$, sont des états de charge +1, respectivement -1. De la même façon on voit que (pas de somme sur l'indice α) :

$$Q b_\alpha b_\alpha^\dagger|0\rangle = |0\rangle, \quad Q d_\alpha d_\alpha^\dagger|0\rangle = |0\rangle, \quad (2.2.32)$$

ce qui montre que b_α , respect. d_α , annihile un état de charge +1, respect. -1.

En conclusion :

- b_α^\dagger crée une particule d'impulsion k , de charge +1, dont la fonction d'onde est $\bar{u}_\alpha(k)$
- b_α détruit une particule d'impulsion k , de charge +1, dont la fonction d'onde est $u_\alpha(k)$
- d_α^\dagger crée une antiparticule d'impulsion k , de charge -1, dont la fonction d'onde est $v_\alpha(k)$
- d_α détruit une antiparticule d'impulsion k , de charge -1, dont la fonction d'onde est $\bar{v}_\alpha(k)$.

On peut donc dire que $\psi(x)$ porte une charge -1 puisqu'il détruit une particule de charge positive et crée une particule de charge négative.

On définit aussi l'hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= : \int d^3x i \psi^\dagger \partial_0 \psi : \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \omega_k \sum_\alpha \left[b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) + d_\alpha^\dagger(k) d_\alpha(k) \right] \end{aligned}$$

On vérifie que $H|0\rangle = 0$, et que l'hamiltonien de tout état (non vide) est défini positif.

2.3 Le propagateur du fermion

D'après la discussion précédente on voit que $\psi(x)$ détruit une particule à la coordonnée d'espace-temps x et crée une antiparticule en x et vice-versa pour $\bar{\psi}(x)$. ψ , $\bar{\psi}$ sont solutions de l'équation de Dirac libre et donc décrivent le mouvement d'une particule libre. On peut alors utiliser $\psi\bar{\psi}$ pour décrire la propagation d'une particule libre. On définit

$$\theta(t - t') \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle \sim \langle 0 | (b_\alpha + d_\alpha^\dagger)(b_\beta^\dagger + d_\beta) | 0 \rangle$$

qui crée à l'instant t' , à la coordonnée \vec{x}' une particule ($b_\beta^\dagger | 0 \rangle$) et, à un instant ultérieur t , la détruit à la coordonnée \vec{x} . On décrit donc ainsi la propagation de la particule du point (t', \vec{x}') au point (t, \vec{x}) . De même,

$$\theta(t' - t) \langle 0 | \bar{\psi}(x') \psi(x) | 0 \rangle \sim \langle 0 | (d_\beta + b_\beta^\dagger)(d_\alpha^\dagger + b_\alpha) | 0 \rangle$$

décrit la propagation de l'antiparticule ($d_\beta^\dagger | 0 \rangle$) de la coordonnée (t, \vec{x}) à la coordonnée (t', \vec{x}') . On définit alors le produit chronologique de deux opérateurs de type fermionique par :

$$\boxed{\mathcal{T} \psi(x) \bar{\psi}(x') = \theta(t - t') \psi(x) \bar{\psi}(x') - \theta(t' - t) \bar{\psi}(x') \psi(x)} \quad (2.3.33)$$

On remarque le signe $(-)$, réminiscence des relations d'anticommuation. Le propagateur de Feynman est, par définition, la valeur sur le vide du produit chronologique de deux opérateurs :

$$\boxed{\tilde{S}_F(x - x') = \langle 0 | \mathcal{T} \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle} \quad (2.3.34)$$

On va maintenant trouver l'expression du propagateur de Feynman libre mais on montre, auparavant, que $\tilde{S}_F(x - x')$ satisfait l'équation (la notation ∂_x indique que l'opérateur différentiel n'agit que sur la variable x) :

$$\boxed{(i \not{\partial}_x - m) \tilde{S}_F(x - x') = i \delta^{(4)}(x - x')} \quad (2.3.35)$$

c'est à dire que le propagateur de Feynman est une fonction de Green de l'équation de Dirac.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
& (i \not{\partial}_x - m) [\theta(t-t') \psi_x \bar{\psi}_{x'} - \theta(t'-t) \bar{\psi}_{x'} \psi_x] \\
&= i\gamma_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \theta(t-t') \right) \psi_x \bar{\psi}_{x'} + \theta(t-t') (i \not{\partial}_x - m) \psi_x \bar{\psi}_{x'} \\
&\quad - i\gamma_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \theta(t'-t) \right) \bar{\psi}_{x'} \psi_x - \theta(t'-t) \bar{\psi}_{x'} (i \not{\partial}_x - m) \psi_x \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{action de } \not{\partial} \text{ sur les fonctions } \theta} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{nul par éq. de Dirac sur } \psi} \\
&= i\gamma_0 \delta(t-t') \{\psi_x, \bar{\psi}_{x'}\} = i\delta^{(4)}(x-x')
\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de l'expression de l'anticommutateur à temps égaux (2.2.27). (c.q.f.d.)

• Propagateur dans l'espace des impulsions

Pour trouver la solution de l'éq. (2.3.35) on introduit la transformée de Fourier du propagateur :

$$\tilde{S}_F(x-x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-x')} S_F(k) \quad (2.3.36)$$

et dans l'espace des impulsions l'équation de Green (2.3.35) devient :

$$\begin{aligned}
& (\not{k} - m) S_F(k) = i \\
& S_F(k) = \frac{i}{\not{k} - m} = i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2}.
\end{aligned}$$

La transformation de Fourier inverse de S_F n'est pas définie à cause de la singularité $k^2 - m^2$. Il faut donc trouver une prescription pour contourner les pôles $k_0 = \pm \sqrt{m^2 + k^2}$. Celle-ci est imposée, en fait, par la causalité. Pour obtenir cette prescription, on retourne à la définition du propagateur de Feynman, éq. (2.3.34), dans laquelle on développera le champ ψ en ses composantes de Fourier. On rappelle les solutions de l'équation de Dirac libre :

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left(b_\alpha(k) u_\alpha(k) e^{-ik \cdot x} + d_\alpha^\dagger(k) v_\alpha(k) e^{ik \cdot x} \right), \\
\bar{\psi}(x') &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} \sum_{\beta=1}^2 \left(b_\beta^\dagger(q) \bar{u}_\beta(q) e^{iq \cdot x'} + d_\beta(q) \bar{v}_\beta(q) e^{-iq \cdot x'} \right),
\end{aligned}$$

et celle du propagateur :

$$\tilde{S}_F(x-x') = \langle 0 | \theta(t-t') \psi(x) \bar{\psi}(x') - \theta(t'-t) \bar{\psi}(x') \psi(x) | 0 \rangle \quad (2.3.37)$$

On considère le premier terme soit,

$$\begin{aligned}
S_F^+(x-x') &= \theta(t-t') \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle \\
&= \theta(t-t') \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} \sum_{\alpha, \beta} \langle 0 | \left(b_\alpha u_\alpha(k) e^{-ik \cdot x} + d_\alpha^\dagger v_\alpha(k) e^{ik \cdot x} \right) \\
&\quad \left(b_\beta^\dagger \bar{u}_\beta(q) e^{iq \cdot x'} + d_\beta \bar{v}_\beta(q) e^{-iq \cdot x'} \right) | 0 \rangle
\end{aligned}$$

Les opérateurs d_α annihilent le vide, $\Rightarrow d_\beta|0\rangle = 0$, $\langle 0|d_\alpha^\dagger = 0$. On peut donc écrire

$$\dots \langle 0|b_\alpha(k)b_\beta^\dagger(q)|0\rangle = \dots + \langle 0|\{b_\beta(k), b_\beta^\dagger(q)\}|0\rangle - \langle 0|b_\beta^\dagger(q)b_\alpha(q)|0\rangle$$

Les relations d'anticommuation (2.2.25) donnent :

$$\{b_\alpha(k), b_\beta^\dagger(q)\} = (2\pi)^3 2\omega_k \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(k - q),$$

un scalaire que l'on peut sortir de $\langle 0| \dots |0\rangle$. On peut alors utiliser $\langle 0|0\rangle = 1$.

Remarque : en permutant $\psi(x)$ et $\bar{\psi}(x')$ pour construire $\bar{\psi}(x')\psi(x)$ on a permuté uniquement les opérateurs $b_\alpha, d_\alpha^\dagger, \dots$ mais non les spineurs. C'est-à-dire que l'on garde toujours les spineurs colonnes u_α, v_α à gauche et les spineurs lignes $\bar{u}_\beta, \bar{v}_\beta$ à droite de telle sorte que S_F est bien une matrice 4×4 (et non un scalaire que l'on aurait obtenu si on avait considéré $\bar{u}_\alpha u_\alpha$!).

On a donc

$$S_F^+(x - x') = \theta(t - t') \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} \left(\sum_{\alpha, \beta} u_\alpha(k) \bar{u}_\beta(q) \delta_{\alpha\beta} \right) e^{iqx'} e^{-ikx} (2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(k - q) \quad (2.3.38)$$

- On fait l'intégration $\int d^3k \delta^{(3)}(k - q) \Rightarrow k = q$
- On utilise l'équation (2.2.23) pour réduire $\sum_\alpha u_\alpha(q) \bar{u}_\alpha(q) = (\not{q} + m)$.

Il vient alors :

$$S_F^+(x - x') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} (\not{q} + m) e^{-iq(x-x')} \theta(t - t').$$

Dans cette équation :

$$\begin{aligned} q(x - x') &= \omega_q(t - t') - \vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') \\ \not{q} &= \omega_q \gamma^0 - \vec{q} \cdot \vec{\gamma} \end{aligned}$$

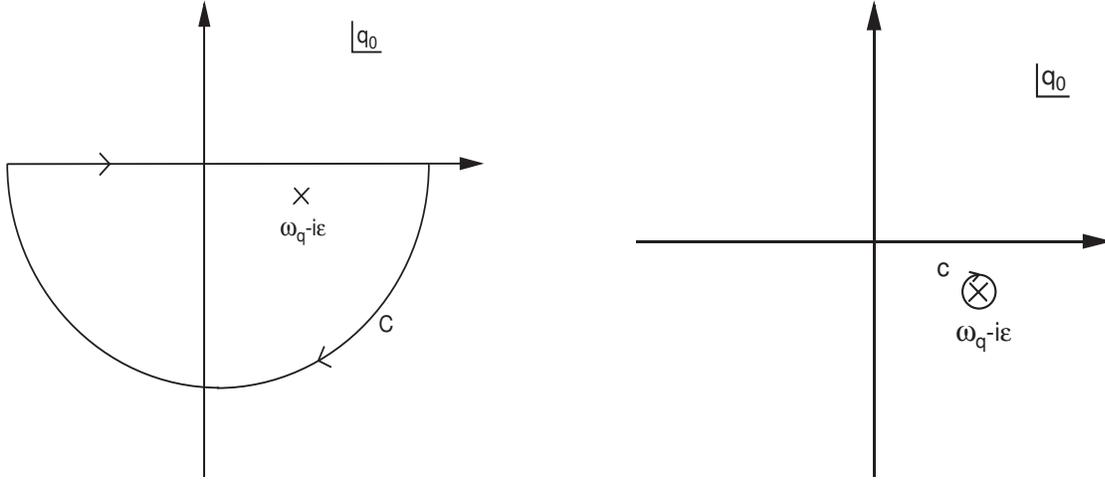
La variable énergie est $\omega_q = \sqrt{(m^2 + \vec{q}^2)}$, i.e. la particule est sur couche de masse quand elle se propage de (t', \vec{x}') à (t, \vec{x}) . On peut alors écrire :

$$S_F^+(x - x') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} (\not{q} + m) e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \left[e^{-i\omega_q(t-t')} \theta(t - t') \right] \quad (2.3.39)$$

On va maintenant trouver une représentation intégrale de la fonction de Heavyside. Pour cela on considère dans le plan complexe q_0 l'intégrale suivante (voir figure) :

$$F^+(t - t') = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dq^0 \frac{e^{-iq^0(t-t')}}{q^0 - \omega_q + i\epsilon} \quad (2.3.40)$$

qui a un pôle simple dans le demi-plan inférieur et pas d'autre singularité.

FIGURE 2.1 – Contour d'intégration dans le plan d'énergie q^0 complexe.

- Si $t - t' < 0$, on peut évaluer l'intégrale en fermant le contour dans le demi plan supérieur par un demi grand cercle qui ne contribue pas, puisque $\text{Im}q^0(t - t') \rightarrow -\infty$:

$$e^{-iq^0(t-t')} \sim e^{(\text{Im}q_0)(t-t')} \rightarrow 0$$

Puisqu'il n'y a pas de singularité dans le demi-plan supérieur cette intégrale est nulle, par le théorème des résidus (de Cauchy) :

$$F^+(t - t') \equiv 0, \quad \text{si } t - t' < 0.$$

- On suppose maintenant $t - t' > 0$, et on ferme le contour dans le demi plan inférieur le long du demi grand cercle, dont la contribution tend exponentiellement vers 0 quand le contour tend vers l'infini. Par déformation du contour il suffit alors d'évaluer l'intégrale le long d'un petit cercle, autour du pôle, dont le rayon tend vers 0. Le théorème de Cauchy donne alors :

$$F^+(t - t') = -e^{-i\omega_q(t-t')} \quad \text{si } t - t' > 0$$

On a donc finalement :

$$F^+(t - t') = -\theta(t - t') e^{-i\omega_q(t-t')} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dq^0 \frac{e^{-iq^0(t-t')}}{q^0 - \omega_q + i\epsilon} \quad (2.3.41)$$

On peut remarquer le signe (-) dans cette équation, qui vient du fait que le contour \mathcal{C} est orienté dans le sens opposé au sens trigonométrique. On utilisera aussi plus tard le résultat :

$$F^-(t - t') = \theta(t' - t) e^{i\omega_q(t-t')} = \frac{1}{2\pi i} \int dq^0 \frac{e^{-iq^0(t-t')}}{q^0 + \omega_q - i\epsilon} \quad (2.3.42)$$

qui se démontre de la même manière que la formule précédente. Revenant au propagateur on peut écrire :

$$\begin{aligned} S_F^+(x-x') &= -\frac{1}{i} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} \int \frac{dq^0}{2\pi} \frac{e^{-iq_0(t-t') + i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{q^0 - \omega_q + i\epsilon} (\not{q} + m) \\ &= i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\omega_q} \frac{e^{-iq\cdot(x-x')}}{q^0 - \omega_q + i\epsilon} (\not{q} + m) \end{aligned} \quad (2.3.43)$$

où maintenant :

$$\begin{aligned} q\cdot(x-x') &= q^0(t-t') - \vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{x}') \\ \not{q} &= q^0\gamma_0 - \vec{q}\vec{\gamma} \end{aligned}$$

donc, dans le numérateur, on considère que la particule est "hors-couche" puisque $q^0 \neq \omega_q$.

On considère maintenant l'autre partie du propagateur :

$$S_F^-(x-x') = \theta(t'-t) \langle 0 | \bar{\psi}(x') \psi(x) | 0 \rangle$$

On peut voir aisément que seul le terme proportionnel à :

$$\langle 0 | d_\beta(q) d_\alpha^\dagger(k) | 0 \rangle$$

ne s'annule pas et utilisant les relations d'anticommutation on a :

$$S_F^-(x-x') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} e^{iq\cdot(x-x')} \sum_\alpha v_\alpha(q) \bar{v}_\alpha(q) \theta(t'-t)$$

Après usage de l'équation (2.2.23) on a :

$$\begin{aligned} S_F^-(x-x') &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} e^{-i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} (\not{q} - m) \left[e^{i\omega_q(t-t')} \theta(t'-t) \right] \\ &= i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} e^{-i\vec{q}\cdot(x-x')} \frac{dq_0}{2\pi} (-\not{q} + m) \frac{e^{-iq_0(t-t')}}{q^0 + \omega_q - i\epsilon} \end{aligned}$$

où la fonction θ a été éliminée via l'éq. (2.3.42). Jusqu'à maintenant, dans l'expression $-\not{q} + m$ on avait considéré la particule sur couche de masse c'est à dire que :

$$-\not{q} + m = -\omega_q \gamma^0 + \vec{q} \vec{\gamma} + m$$

que l'on peut maintenant écrire :

$$-\not{q} + m = q^0 \gamma^0 + \vec{q} \vec{\gamma} + m$$

à cause du pôle $q^0 = -\omega_q$. Pour reconstruire la bonne combinaison $q^0 \gamma^0 - \vec{q} \vec{\gamma}$, de même que le bon exposant dans l'exponentielle, on fait dans l'intégrale $\int d^3q$ le changement de variable $\vec{q} = -\vec{q}'$ et $\int d^3q = \int d^3q'$. Revenant à la notation $\vec{q}' = \vec{q}$ on peut alors écrire

$$\begin{aligned} S_F^-(x-x') &= i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{dq^0}{2\pi} \frac{1}{2\omega_q} e^{-iq_0(t-t') + i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{(q^0 \gamma^0 - \vec{q} \vec{\gamma} + m)}{q^0 + \omega_q - i\epsilon} \\ &= i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\omega_q} e^{-iq\cdot(x-x')} \frac{\not{q} + m}{q^0 + \omega_q - i\epsilon} \end{aligned}$$

où le vecteur $q = (q^0, \vec{q})$ est maintenant hors-couche. On peut remarquer alors que les numérateurs de S_F^+ et S_F^- sont identiques. On peut donc les combiner pour obtenir

$$\begin{aligned}\tilde{S}_F(x-x') &= S_F^+(x-x') - S_F^-(x-x') \\ &= i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot (x-x')} (\not{q} + m) \frac{1}{2\omega_q} \left(\frac{1}{q^0 - \omega_q + i\epsilon} - \frac{1}{q^0 + \omega_q - i\epsilon} \right),\end{aligned}$$

soit,

$$\boxed{\tilde{S}_F(x-x') = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot (x-x')} \frac{(\not{q} + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon}} \quad (2.3.44)$$

où on a écrit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\omega_q} \left(\frac{1}{q^0 - \omega_q + i\epsilon} - \frac{1}{q^0 + \omega_q - i\epsilon} \right) &= \frac{1}{q^{02} - \omega_q^2 + 2\omega_q i\epsilon}, \quad \epsilon \rightarrow 0_+ \\ &= \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad \epsilon \rightarrow 0_+\end{aligned}$$

en notation covariante. Par comparaison avec l'éq. (2.3.36), on en tire la forme du propagateur dans l'espace des impulsions (transformation de Fourier)

$$\boxed{S_F(q) = i \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{\not{q} - m + i\epsilon}} \quad (2.3.45)$$

On voit que sous la forme éq. (2.3.37), définie dans l'espace des coordonnées, le propagateur correspond,

- quand $t' < t$, à la propagation d'une particule sur couche de masse ($q^0 = \omega_q$) des coordonnées (t', \vec{x}') à (t, \vec{x})
- quand $t' > t$ à la propagation d'une antiparticule sur couche de masse ($q^0 = -\omega_q$), des coordonnées (t, \vec{x}) à (t', \vec{x}') .

En revanche, sous la forme éq. (2.3.45), écrite dans l'espace des impulsions, le propagateur est interprété comme décrivant la propagation d'une particule virtuelle ($q^0 \neq \pm\omega_q$). On passe d'une forme à l'autre, via l'éq. (2.3.36) et le théorème de Cauchy, qui permet par fermeture du contour d'intégration dans le plan de l'énergie complexe, d'isoler le pôle d'énergie positive ou le pôle d'énergie négative suivant le signe de $t-t'$. Ceci est encapsulé dans la prescription "iε" de Feynman où $\epsilon \rightarrow 0_+$.

2.4 Le champ du photon libre

On rappelle l'équation du mouvement du champ du photon en QED (éq.(2.1.12)) :

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) &\equiv (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\nu \partial^\mu) A_\mu(x) \\ &= e\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) = e J^\nu(x) \quad \text{théorie en interaction} \\ &= 0 \quad \text{théorie libre}\end{aligned} \quad (2.4.46)$$

Le champ $A_\mu(x)$ (potentiel vecteur en théorie classique) qui décrit la polarisation du photon, a quatre composantes indépendantes (A_0, A_1, A_2, A_3) soit quatre degrés de liberté. Or, on sait que le

photon n'a que deux degrés de liberté correspondant à ses deux états de polarisation transverse : cf. la théorie des représentations du groupe de Poincaré pour une particule de masse nulle. La physique est indépendante du choix de la jauge c'est à dire du choix :

$$A'_\mu(x) \text{ ou } A_\mu(x) = A'_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x).$$

En effet, si A'_μ est solution de l'équation ci-dessus (libre ou en interaction) $A_\mu(x)$ est aussi solution puisque :

$$(\partial^2 g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) \partial^\nu \alpha(x) \equiv 0 \quad \forall \alpha(x).$$

On peut donc utiliser cette invariance de jauge pour réduire le nombre de degrés de liberté de A_μ en imposant la condition de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ par le choix $\partial^2 \alpha = -\partial_\mu A'^\mu(x)$. L'équation du photon libre devient alors ($\square = \partial_\mu \partial^\mu$) :

$$\square A_\mu(x) = 0.$$

On peut éliminer un autre degré de liberté en annulant une des coordonnées de A_μ (A_0 par exemple) à l'aide de la translation :

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda(x), \quad \lambda(x) \text{ telle que } \square \lambda(x) = 0$$

(choisir $\lambda(x) = iae^{-ik \cdot x}$ par exemple) de sorte que l'on reste avec deux coordonnées indépendantes.

• Quantification

Le lagrangien du photon libre, cependant, pose problème lorsque l'on veut quantifier la théorie. Introduisant la variable conjuguée de $A_\nu(x)$,

$$\pi_\nu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 A^\nu} = -\partial_0 A_\nu + \partial_\nu A_0 = F_{\nu 0} \quad (2.4.47)$$

les relations de commutation à temps égal ($x_0 = y_0$) sont :

$$\boxed{[A_\mu(x), \pi_\nu(y)] = i g_{\mu\nu} \delta^{(3)}(x - y), \quad [A_\mu(x), A_\nu(y)] = [\pi_\nu(x), \pi_\nu(y)] = 0.} \quad (2.4.48)$$

On voit que la relation $[A_0(x), \pi_0(y)] = i \delta^{(3)}(x - y)$ ne peut être satisfaite puisque $\pi_0(y) = 0$.

• Jauges covariantes

Une solution consistera à briser l'invariance de jauge au niveau des opérateurs et on la restaurera uniquement quand on considèrera la valeur des opérateurs sur des états physiques. C'est la méthode de Gupta-Bleuler. On considèrera donc le lagrangien modifié (photon libre) "cassant" l'invariance de jauge,

$$\mathcal{L}_\lambda = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu(x))^2, \quad (2.4.49)$$

où le terme $(\partial_\mu A^\mu)^2$ est le terme de "fixation" de jauge pour une jauge covariante. L'impulsion conjuguée devient :

$$\pi_\nu(x) = F_{\nu 0}(x) - \lambda g_{\nu 0} \partial_\mu A^\mu(x), \quad \text{soit,}$$

$$\boxed{\pi_0 = -\lambda \partial_\rho A^\rho = -\lambda (\dot{A}_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad \text{et} \quad \pi_i = \partial_i A_0 - \dot{A}_i.} \quad (2.4.50)$$

π_0 est non nul en général et les $\pi_i(x)$ ne sont pas affectés car ils ne dépendent pas de λ . L'équation du mouvement de la théorie modifiée devient :

$$\boxed{\square A_\mu - (1 - \lambda)\partial_\mu\partial_\nu A^\nu = 0} \quad (2.4.51)$$

Si on choisit $\lambda = 1$ l'équation du mouvement se simplifie en :

$$\square A_\mu = 0. \quad (2.4.52)$$

qui sont les équations des composantes du champ du photon en jauge de Feynman. Cela correspond à quatre équations de Klein-Gordon indépendantes, une pour chaque composante de $A_\mu(x)$. On cherche évidemment la solution sous forme d'une superposition d'ondes planes. Pour cela on introduit, dans le repère où le photon est longitudinal, $k = (k_0, 0, 0, k)$, une base de quatre vecteurs linéairement indépendants :

$$\begin{aligned} \epsilon^{(0)\mu} &= (1, 0, 0, 0), & \text{vecteur de polarisation "scalaire"} \\ \epsilon^{(1)\mu} &= (0, 1, 0, 0), \quad \epsilon^{(2)\mu} = (0, 0, 1, 0), & \text{vecteurs de polarisation "transverse"} \\ \epsilon^{(3)\mu} &= (0, 0, 0, 1), & \text{vecteur de polarisation "longitudinale"}. \end{aligned} \quad (2.4.53)$$

Ces vecteurs satisfont à $\epsilon_\mu^{(\kappa)}\epsilon^{(\kappa')\mu} = 0$ si $\kappa \neq \kappa'$, $\epsilon_\mu^{(0)}\epsilon^{(0)\mu} = 1$ et $\epsilon_\mu^{(i)}\epsilon^{(i)\mu} = -1$ pour chaque $i = 1, 2, 3$. On écrit la solution de l'éq. (2.4.52) :

$$\boxed{A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \sum_{\kappa=0}^3 \left(a^{(\kappa)} \epsilon_\mu^{(\kappa)} e^{-ik \cdot x} + a^{(\kappa)\dagger} \epsilon_\mu^{(\kappa)} e^{ik \cdot x} \right)} \quad (2.4.54)$$

avec $\omega = |\vec{k}|$ (équation Klein-Gordon de masse nulle).

Normalisation :

$$\boxed{\epsilon_\mu^{(\kappa)}\epsilon^{(\kappa')\mu} \equiv \epsilon^{(\kappa)} \cdot \epsilon^{(\kappa')} = g_{\kappa\kappa'} ; \quad \text{soit } \epsilon^{(0)} \cdot \epsilon^{(0)} = 1, \quad \epsilon^{(i)} \cdot \epsilon^{(i)} = -1} \quad (2.4.55)$$

Le tenseur somme sur les polarisations satisfait à :

$$\boxed{\sum_{\kappa, \kappa'=0}^3 g_{\kappa\kappa'} \epsilon_\mu^{(\kappa)} \epsilon_\nu^{(\kappa')} = g_{\mu\nu} \Leftrightarrow \sum_{\kappa=0}^3 \xi_\kappa \epsilon_\mu^{(\kappa)} \epsilon_\nu^{(\kappa)} = -g_{\mu\nu}, \quad \xi_0 = -1, \quad \xi_i = +1} \quad (2.4.56)$$

Les deux formulations sont strictement équivalentes et nous utiliserons l'une ou l'autre suivant le contexte.

Exercice : Vérifier explicitement les relations (2.4.55) et (2.4.56).

Pour le choix de jauge $\lambda = 1$ (*jauge de Feynman*) on peut obtenir, à partir des relations de commutation canoniques (2.4.48) et de la forme éq. (2.4.54) de $A_\mu(x)$, les relations de commutation entre les opérateurs $a^{(\kappa)}$ et $a^{(\kappa)\dagger}$ qui seront interprétés comme opérateurs d'annihilation et de création du

photon. Pour le cas d'une jauge covariante générale, $\lambda \neq 1$, la solution de l'équation du mouvement n'a pas une forme simple et l'obtention des relations de commutation des opérateurs est beaucoup plus compliquée.

• **Quantification du champ du photon en jauge de Feynman**

Partant de la solution, éq. (2.4.54), de l'équation du mouvement et utilisant les relations de quantification canonique (éqs. (2.4.48)) entre A_μ et π_ν , on montre que les opérateurs $a^{(\kappa)}$, $a^{(\kappa)\dagger}$ de la décomposition en ondes planes de A_μ satisfont les relations de commutation :

$$\boxed{\begin{aligned} [a^{(\kappa)}(k), a^{(\kappa')\dagger}(k')] &= -2\omega_k (2\pi)^3 g^{\kappa\kappa'} \delta^{(3)}(k - k') \\ [a^{(\kappa)}, a^{(\kappa')}] &= [a^{(\kappa)\dagger}, a^{(\kappa')\dagger}] = 0. \end{aligned}} \quad (2.4.57)$$

Démonstration

On extrait d'abord $a^{(\kappa)}(q)$ de $A^\mu(x)$ par une transformation de Fourier inverse en considérant :

$$\int d^3x e^{iq \cdot x} i \overleftrightarrow{\partial}_0 \epsilon_\mu^{(\kappa)} A^\mu(x).$$

avec $f(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 g(x) = f(x) \partial_0 g(x) - (\partial_0 f(x)) g(x)$. Injectant la représentation éq. (2.4.54) de $A^\mu(x)$, on en tire facilement :

$$\begin{aligned} a^{(\kappa)}(q) &= -\xi_\kappa \int d^3x e^{iq \cdot x} i \overleftrightarrow{\partial}_0 \epsilon_\mu^{(\kappa)}(q) A^\mu(x) \\ a^{(\kappa)\dagger}(q) &= \xi_\kappa \int d^3x e^{-iq \cdot x} i \overleftrightarrow{\partial}_0 \epsilon_\mu^{(\kappa)}(q) A^\mu(x) \end{aligned}$$

où ξ_κ est défini en éq. (2.4.56). Pour construire les commutateurs entre opérateurs création et annihilation il est nécessaire maintenant de trouver les commutateurs entre les $A^\mu(x)$ et les $\dot{A}^\nu(y) = \partial_0 A^\nu(x)$ à partir des éqs. (2.4.48) et de la définition éq. (2.4.50) des $\Pi^\nu(y)$. On trouve ainsi que :

$$[A^\mu(x), \dot{A}^\nu(y)] = -ig^{\mu\nu} \delta^{(3)}(x - y), \quad (2.4.58)$$

tous les autres commutateurs étant nuls. On peut alors évaluer :

$$\begin{aligned} [a^{(\kappa)}(q), a^{(\kappa')\dagger}(q')] &= -\xi_\kappa \xi_{\kappa'} \int d^3x d^3y [e^{iq \cdot x} i \overleftrightarrow{\partial}_0 \epsilon_\mu^{(\kappa)}(q) A^\mu(x), e^{-iq' \cdot y} i \overleftrightarrow{\partial}_0 \epsilon_\nu^{(\kappa')}(q') A^\nu(y)] \\ &= -\xi_\kappa \xi_{\kappa'} \int d^3x d^3y \epsilon_\mu^{(\kappa)}(q) \epsilon_\nu^{(\kappa')}(q') e^{i(q \cdot x - q' \cdot y)} g^{\mu\nu} \delta^{(3)}(x - y) (\omega_q + \omega_{q'}) \\ &= -2\omega_q (2\pi)^3 g^{\kappa\kappa'} \delta^{(3)}(q - q'). \end{aligned} \quad (2.4.59)$$

On prouve la nullité des autres commutateurs suivant la même procédure.

Les $a^{(\kappa)}$, $a^{(\kappa)\dagger}$ deviennent les opérateurs de destruction et d'annihilation habituels d'un champ de Klein-Gordon : e.g. $a^{(0)\dagger}$ crée un γ "scalaire", $a^{(3)\dagger}$ un γ "longitudinal" et $a^{(1)\dagger}$, $a^{(2)\dagger}$ créent un γ en état de polarisation transverse. Il faut cependant remarquer le facteur $-g^{\kappa\kappa'}$ dans la première relation ci-dessus qui est (-1) pour $\kappa = \kappa' = 0$ alors qu'il est +1 pour les autres valeurs $\kappa = \kappa' = 1, 2, 3$ en accord avec les relations de commutation d'un champ scalaire (ce facteur vient

des condition de normalisation des vecteurs $\epsilon_\mu^{(\kappa)}$ données ci-dessus). Si on considère un état à une particule de polarisation κ :

$$|1 \rangle_\kappa = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} f(k) a^{(\kappa)\dagger}(k) |0 \rangle$$

on peut calculer sa normalisation :

$$\begin{aligned} \langle 1 | 1 \rangle_\kappa &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\omega_q} f(k)^* f(q) \langle 0 | [a^{(\kappa)}, a^{(\kappa)\dagger}] | 0 \rangle \\ &= +\xi_\kappa \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} |f(k)|^2 \end{aligned}$$

L'état de polarisation scalaire a donc une norme négative $\xi_0 = -1$ alors que les autres états de polarisation ont une norme positive comme il se doit. On peut construire l'hamiltonien de façon habituelle :

$$H =: \int d^3x (\pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L}) :$$

et trouver :

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_\kappa \omega_k \xi_\kappa a^{(\kappa)\dagger}(k) a^{(\kappa)}(k) .$$

Appliqué à l'état à 1 photon d'impulsion k , de polarisation κ :

$$H |1_k^\kappa \rangle = \omega_k \xi_\kappa a_k^{(\kappa)\dagger} |0 \rangle$$

Le signe $\xi_0 = -1$, associé au mode scalaire, dans l'expression de H est nécessaire pour que l'énergie soit définie positive puisque l'énergie de tout état à une particule (y compris celui de polarisation scalaire) contribue une énergie ω_k . De même l'opérateur de comptage est défini par :

$$N_k = \xi_\kappa a^{(\kappa)\dagger}(k) a^{(\kappa)}(k).$$

• Etats physiques

Pour que la théorie fondée sur le lagrangien \mathcal{L}_λ qui brise l'invariance de jauge décrive bien QED dont le lagrangien est $\mathcal{L} = -(1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ on va imposer la condition de Lorentz uniquement lorsque les opérateurs agissent sur des états physiques (méthode de Gupta-Bleuler) c'est-à-dire :

$$\langle \phi | \partial_\mu A^\mu(x) | \phi \rangle = 0, \quad | \phi \rangle \text{ état physique}$$

Il est suffisant en fait de choisir :

$$\partial_\mu A^{+\mu}(x) | \phi \rangle = 0 \tag{2.4.60}$$

où

$$A_\mu^+(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\kappa=0}^3 \epsilon_\mu^{(\kappa)} a^{(\kappa)} e^{-ik \cdot x}.$$

En effet on a alors :

$$\langle \phi | \partial^\mu A_\mu^- = 0.$$

On voit aisément que :

$$\partial^\mu A_\mu^+(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\kappa=0}^3 (k^\mu \cdot \epsilon_\mu^{(\kappa)}) a^{(\kappa)} e^{-ik \cdot x}$$

où la somme ne concerne que les états scalaire et longitudinal puisque l'on a les relations de transversité :

$$k \cdot \epsilon^{(1)} = k \cdot \epsilon^{(2)} = 0.$$

Sur les états physiques on aura alors nécessairement (voir la définitions des $\epsilon_\mu^{(\kappa)}$) :

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^{+\mu}(x)|\phi\rangle = 0 &\Rightarrow (\omega_k a^{(0)} - k a^{(3)})|\phi\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^{(0)} - a^{(3)})|\phi\rangle = 0 \quad \forall k. \end{aligned} \quad (2.4.61)$$

Pour calculer l'énergie d'un état physique on peut remarquer :

$$\langle \phi | a^{(3)\dagger} a^{(3)} - a^{(0)\dagger} a^{(0)} | \phi \rangle = \langle \phi | a^{(3)\dagger} (a^{(3)} - a^{(0)}) | \phi \rangle = 0$$

et

$$\langle \phi | H | \phi \rangle = \langle \phi | \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\kappa=1}^2 \omega_k a^{(\kappa)\dagger} a^{(\kappa)} | \phi \rangle \quad (2.4.62)$$

Seuls les photons transverses contribuent à l'énergie. Ceci est vrai pour n'importe quel observable. De façon qualitative on peut dire que les contributions de photons scalaires et longitudinaux se compensent dans tout observable physique.

• Jauges non covariantes⁴

Dans ce cas, le terme de fixation de jauge est, par exemple, de la forme $n_\mu A^\mu$ où n_μ est un quadrivecteur arbitraire constant et le lagrangien est :

$$\mathcal{L}_\lambda = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \frac{\lambda}{2} (n_\mu A^\mu(x))^2, \quad (2.4.63)$$

de sorte que l'équation du mouvement devient :

$$\boxed{\square A_\mu(x) - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu(x) - \lambda n_\mu n_\nu A^\nu(x) = 0.} \quad (2.4.64)$$

Avec ce choix le moment conjugué $\pi^0(x)$ est toujours nul et on n'a pas résolu le problème qui motivait l'introduction dans le lagrangien d'un terme brisant la symétrie! On peut cependant éliminer les coordonnées temporelles si l'on choisit $n_\nu A^\nu = 0$ avec $n_\nu = (1, 0, 0, 0)$. Si on impose de plus la condition de Lorentz $\partial_\nu A^\nu(x) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (*jauge de Coulomb*) on élimine les états de polarisation scalaire et longitudinale et l'équation du mouvement se simplifie ($\square A_\mu(x) = 0$) et on peut écrire :

$$A_i(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\kappa=1}^2 \left(a^{(\kappa)} \epsilon_i^{(\kappa)} e^{-ik \cdot x} + a^{(\kappa)\dagger} \epsilon_i^{(\kappa)} e^{ik \cdot x} \right) \quad (2.4.65)$$

4. Pour une revue, voir G. Leibbrandt, Rev. Mod. Phys. **59** (1987) 1067

avec seulement les polarisations transverses (physiques). Il faut alors quantifier le système sous les contraintes $n \cdot A = \partial \cdot A = 0$ ce qui est une tâche ardue.

Un peu de terminologie : la condition $n \cdot A = 0$ avec,

* $n^2 < 0$, *jauge axiale pure*

* $n^2 = 0$, *jauge du cône de lumière*

* $n^2 > 0$, *jauge temporelle*.

2.5 Le propagateur du photon

Comme pour le cas du fermion on définit le produit chronologique de deux champs $A_\mu(x)$ et $A_\nu(y)$ et le propagateur du photon qui est la valeur sur le vide de ce produit :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\mu\nu}(x-y) &\equiv \langle 0 | \mathcal{T}(A_\mu(x)A_\nu(y)) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \theta(x_0 - y_0) A_\mu(x)A_\nu(y) + \theta(y_0 - x_0) A_\nu(y)A_\mu(x) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.5.66)$$

• Jauges covariantes

On montre que le propagateur, en jauge covariante, satisfait à l'équation de Green :

$$\boxed{(\square g_{\mu\nu} - (1 - \lambda)\partial_\mu\partial_\nu) \tilde{G}^{\nu\rho}(x-y) = i g_\mu^\rho \delta^{(4)}(x-y)} \quad (2.5.67)$$

Exercice : Pour vérifier explicitement l'équation ci-dessus, c'est un peu plus compliqué que dans le cas du fermion à cause des opérateurs ∂_0^2 et $\partial_\mu\partial_\nu$ qui, on le rappelle, n'agissent que sur la variable x .

Démonstration

On considère dans un premier temps :

$$\begin{aligned} \square g_{\mu\nu} \tilde{G}^{\nu\rho}(x-y) &= (\partial_0^2 - \partial_i^2) \tilde{G}_\mu^\rho(x-y) \\ &= \partial_0 \{ \delta(x_0 - y_0) [A_\mu(x), A^\rho(y)] + \theta(x_0 - y_0) \partial_0 A_\mu(x) A^\rho(y) + \theta(y_0 - x_0) A^\rho(y) \partial_0 A_\mu(x) \} \\ &\quad - \theta(x_0 - y_0) \partial_i^2 A_\mu(x) A^\rho(y) - \theta(y_0 - x_0) A^\rho(y) \partial_i^2 A_\mu(x) \end{aligned}$$

L'opérateur ∂_i n'agit pas sur les fonction θ tandis que $\partial_0\theta(\pm x_0 \mp y_0) = \pm\delta(x_0 - y_0)$, d'où l'apparition du commutateur de deux champs qui est, en fait, nul par l'éq. (2.4.48). L'action de l'opérateur ∂_0 de la deuxième ligne donne de nouveau la fonction $\delta(x_0 - y_0)$ avec comme coefficient le commutateur du champ et de sa dérivée temporelle, d'où :

$$\square g_{\mu\nu} \tilde{G}^{\nu\rho}(x-y) = \delta(x_0 - y_0) [\partial_0 A_\mu(x), A^\rho(y)] + \theta(x_0 - y_0) \square g_{\mu\nu} A^\nu(x) A^\rho(y) + \theta(y_0 - x_0) A^\rho(y) \square g_{\mu\nu} A^\nu(x),$$

où on a reconstruit l'action de l'opérateur $\square g_{\mu\nu}$ sur le champ $A^\nu(x)$. De façon similaire on montre facilement que :

$$\partial_\nu \tilde{G}^{\nu\rho} = \theta(x_0 - y_0) \partial_\nu A^\nu(x) A^\rho(y) + \theta(y_0 - x_0) A^\rho(y) \partial_\nu A^\nu(x)$$

puisque même si $\nu = 0$ et agit sur la fonction θ , la fonction $\delta(x_0 - y_0)$ produite aura comme coefficient un commutateur de champs qui est nul. Finalement on a :

$$\partial_\mu \partial_\nu \tilde{G}^{\nu\rho} = g_{\mu 0} \delta(x_0 - y_0) [\partial_\nu A^\nu(x), A^\rho(y)] + \theta(x_0 - y_0) \partial_\mu \partial_\nu A^\nu(x) A^\rho(y) + \theta(y_0 - x_0) A^\rho(y) \partial_\mu \partial_\nu A^\nu(x).$$

Recollant tous les morceaux pour construire le membre de gauche de l'éq. (2.5.67) on remarque que le coefficient des fonctions $\theta(\pm x_0 \mp y_0)$ est nul par l'équation du mouvement en jauge covariante,

$$(\square g_{\mu\nu} - (1 - \lambda)\partial_\mu\partial_\nu) A^\nu(x) = 0,$$

de sorte qu'il reste un commutateur un peu compliqué :

$$(\square g_{\mu\nu} - (1 - \lambda)\partial_\mu\partial_\nu) \tilde{G}^{\nu\rho}(x - y) = \delta(x_0 - y_0)[\partial_0 A_\mu(x) - (1 - \lambda)g_{\mu 0}\partial_\nu A^\nu(x), A^\rho(y)].$$

Pour $\mu = 0$, le membre de droite est

$$\begin{aligned} \delta(x_0 - y_0)[\partial_0 A_\mu(x) - (1 - \lambda)g_{\mu 0}\partial_\nu A^\nu(x), A^\rho(y)] &= \delta(x_0 - y_0)\{-[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x), A^\rho(y)] - [\pi_0(x), A^\rho(y)]\} \\ &= i g_0^\rho \delta^{(4)}(x - y). \end{aligned}$$

Pour obtenir ce résultat on a utilisé la définition de $\pi_0(x)$ (éq. (2.4.50)), la relation de commutation (2.4.48) et le fait que $[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x), A^\rho(y)] = \vec{\nabla} \cdot [\vec{A}(x), A^\rho(y)] = 0$. Pour le cas $\mu = i$, le membre de droite est :

$$\begin{aligned} \delta(x_0 - y_0)[\partial_0 A_i(x), A^\rho(y)] &= \delta(x_0 - y_0)[\partial_i A_0(x) - \pi_i(x), A^\rho(y)] \\ &= \delta(x_0 - y_0)[A^\rho(y), \pi_i(x)] = i g_i^\rho \delta^{(4)}(x - y), \end{aligned}$$

en faisant référence aux mêmes équations que pour le cas $\mu = 0$.

On résout l'équation de Green en introduisant la transformée de Fourier :

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} G_{\mu\nu}(k)$$

qui satisfait à l'équation :

$$[-k^2 g_{\mu\nu} + (1 - \lambda)k_\mu k_\nu] G^{\nu\rho}(k) = i g_\mu^\rho.$$

La solution la plus générale a la forme :

$$G^{\nu\rho}(k) = A(k^2)g^{\nu\rho} + B(k^2)k^\nu k^\rho.$$

L'équation de Green contraint les coefficients scalaires $A(k^2)$ et $B(k^2)$ et on trouve finalement :

$$G_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2} g_{\mu\nu} - i \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda} \right) \frac{k_\mu k_\nu}{k^4}$$

Il faut choisir une prescription pour contourner le pôle (à masse nulle) $k^2 = 0$. Comme dans le cas du propagateur du fermion, la causalité impose le choix " $+i\epsilon$ " et donc $k^2 \rightarrow k^2 + i\epsilon$, soit :

$$\boxed{G_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right)} \quad (2.5.68)$$

qui est la forme la plus générale du propagateur en *jauge covariante*. Dans la discussion précédente on avait choisi $\lambda = 1$, *jauge de Feynman* et donc,

$$\boxed{G_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}.} \quad (2.5.69)$$

Si $\lambda \rightarrow \infty$, on a la *jauge de Landau* :

$$\boxed{G_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2}{k^2 + i\epsilon}}. \quad (2.5.70)$$

• **Jauges non covariantes**

Dans ce cas, la densité lagrangienne éq. (2.4.63) conduit, à l'équation de Green suivante :

$$\boxed{(\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu - \lambda n_\mu n_\nu) \tilde{G}^{\nu\rho}(x-y) = i g_\mu^\rho \delta^{(4)}(x-y)}, \quad (2.5.71)$$

et après avoir effectué la transformée de Fourier, à :

$$[-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu - \lambda n_\mu n_\nu] G^{\nu\rho}(k) = i g_\mu^\rho.$$

On cherche la solution sous la forme d'une combinaison linéaire des tenseurs $g^{\nu\rho}$, $k^\nu n^\rho + k^\rho n^\nu$, $k^\nu k^\rho$ et $n^\nu n^\rho$. On trouve finalement le propagateur :

$$\boxed{G_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k \cdot n} + \frac{k_\mu k_\nu}{(k \cdot n)^2} \left(n^2 + \frac{k^2}{\lambda} \right) \right)}. \quad (2.5.72)$$

Exercice

On peut remarquer que si on avait considéré, au lieu de \mathcal{L}_λ (qui ne respecte pas l'invariance de jauge), le lagrangien \mathcal{L}_{QED} initial, on n'aurait pas pu définir le propagateur car l'équation

$$(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) G^{\nu\rho} = i g_\mu^\rho$$

n'a pas de solution pour $G^{\mu\rho}$. Le prouver.

2.5.1 Remarques sur le propagateur du photon

Comme on l'a fait pour le fermion on peut construire explicitement le propagateur en jauge de Feynman dans l'espace des coordonnées et extraire ensuite sa forme dans l'espace des impulsions. Pour cela on utilise la représentation éq. (2.4.54) du champ du photon, avec le choix éqs. (2.4.53) des vecteurs polarisation. On trouve alors :

$$G_{\mu\nu}(k) = i \frac{\mathcal{P}_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}, \quad (2.5.73)$$

avec

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = - \sum_{\kappa, \kappa'=0}^3 g_{\kappa\kappa'} \epsilon_\mu^{(\kappa)} \epsilon_\nu^{(\kappa')}. \quad (2.5.74)$$

Le tenseur $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ apparaît comme la somme sur les états de polarisation de $\epsilon_\mu^{(\kappa)} \epsilon_\nu^{(\kappa')}$ et le facteur $g_{\kappa\kappa'}$ est la conséquence des relations de commutation (2.4.57). D'après l'éq. (2.4.56), on a :

$$\boxed{G_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}}, \quad (2.5.75)$$

et on retrouve bien la forme (2.5.69) du propagateur. On remarque que la trace de $-\mathcal{P}_{\mu\nu} = g_{\mu}^{\mu}$ compte simplement le nombre d'états de polarisation du champ A_{μ} , à savoir 4.

En *jauge de Landau* on remarque que le propagateur satisfait à la relation $k^{\mu}G_{\mu\nu} = 0$ ce qui implique une contrainte sur le champ A_{μ} . Corrélativement, la trace du numérateur :

$$\text{Tr}(g_{\mu\nu} - k_{\mu}k_{\nu}/k^2) = 3 \quad (2.5.76)$$

ce que l'on interprète par le fait le champ du photon contient 3 degrés de liberté dont un non physique.

En *jauge axiale* on fait d'habitude le choix $\lambda \rightarrow \infty$ et le propagateur devient (éq. (2.5.72)) :

$$\boxed{G_{\mu\nu}(k) = -i \frac{\mathcal{P}_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu} - \frac{(k_{\mu}n_{\nu} + n_{\mu}k_{\nu})}{k \cdot n} + \frac{n^2 k_{\mu}k_{\nu}}{(k \cdot n)^2} \right)}, \quad (2.5.77)$$

qui satisfait deux contraintes $n^{\mu}\mathcal{P}_{\mu\nu}(k) = 0$ et, pour k^2 de genre lumière, $k^{\mu}\mathcal{P}_{\mu\nu}(k) = 0$. On vérifie facilement que la trace du tenseur entre parenthèses est bien égale à 2 comme il se doit lorsque le photon est sur couche de masse. Avec ce choix de jauge seuls les degrés de polarisation physique sont inclus dans le calcul.

2.5.2 Indépendance de jauge et conservation du courant

Les différentes formes du propagateur diffèrent par des termes contenant k_{μ} et on peut se demander si les prédictions physiques en QED vont dépendre du choix du propagateur. La réponse est négative puisque le photon est couplé à un courant conservé, $k_{\mu}J^{\mu} = 0$, où $J^{\mu}(x) = -e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$. On peut le voir de la façon suivante en ce qui concerne les jauges covariantes. Du lagrangien \mathcal{L}_{λ} , voir éq. (2.4.49), du photon en interaction :

$$\mathcal{L}_{\lambda} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \frac{\lambda}{2} (\partial_{\mu}A^{\mu}(x))^2 + \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) + e\bar{\psi}(x) \not{A}(x)\psi(x), \quad (2.5.78)$$

on tire facilement l'équation du mouvement du photon :

$$(\square g_{\mu\nu} - (1 - \lambda)\partial_{\mu}\partial_{\nu}) A^{\nu}(x) = e J_{\mu}(x),$$

dont la solution s'exprime à l'aide de la fonction de Green :

$$A_{\nu}(x) = \int d^4y \tilde{G}_{\nu\mu}(x - y) J^{\mu}(y)$$

Ceci est évident par simple substitution dans l'équation du mouvement. Introduisant la transformée de Fourier du courant :

$$J^{\mu}(y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} j^{\mu}(k) e^{-ik \cdot y}$$

ainsi que celle du propagateur avec la solution s'écrit alors :

$$A_{\nu}(x) = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \left[\frac{g_{\nu\mu}}{k^2 + i\epsilon} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{k_{\nu}k_{\mu}}{(k^2 + i\epsilon)^2} \right] j^{\mu}(k)$$

et il devient évident que les termes dépendant de jauge s'annulent par conservation du courant $k_\mu j^\mu(k) = 0$. En conclusion, les résultats des calculs ne doivent pas dépendre du choix particulier fait pour la forme du propagateur du photon. A cause de cette propriété il n'est pas nécessaire dans les calculs perturbatifs d'imposer la condition de Lorentz sur le champ $A_\mu(x)$ puisque le photon étant soit émis soit absorbé par un courant conservé les états de polarisation scalaire et longitudinale sont automatiquement découplés du monde physique.

• **Remarque**

On considère le lagrangien \mathcal{L}_λ éq. (2.5.78) avec le terme d'interaction $-J_\mu(x)A^\mu(x)$. Ce terme est invariant si on change "la jauge du photon" c'est à dire si on fait $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha(x)$. On a alors :

$$\delta \int d^4x J_\mu A^\mu = \int d^4x J_\mu(x) \partial^\mu \alpha(x) = \int d^4x [\partial^\mu (J_\mu(x) \alpha(x)) - (\partial^\mu J_\mu(x)) \alpha(x)] = 0.$$

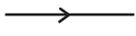
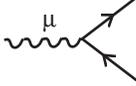
Dans la dernière forme de l'intégrale ci-dessus, la dérivée totale $\partial^\mu (J_\mu(x) \alpha(x))$ ne contribue pas (pas de sources à l'infini) et le terme $(\partial^\mu J_\mu(x))$ est nul par conservation du courant. Ceci illustre bien le rôle fondamental joué par la conservation du courant en QED.

2.6 Règles de Feynman de QED

Nous avons dérivé ci-dessus les éléments de base qui permettent de construire le développement perturbatif en QED. Ce développement s'exprime à l'aide de règles qui permettent d'écrire "l'élément de matrice invariant" \mathcal{M}_{fi} , relié à la matrice S par

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \delta_{fi} + i T_{fi} \\ T_{fi} &= (2\pi)^4 \delta(\Sigma p_{ext}) \mathcal{M}_{fi}, \end{aligned}$$

à tout ordre de la théorie des perturbations. Les règles de Feynman sont simplement énoncées ici. Pour une démonstration on peut consulter les livres de Bjorken et Drell ou Mandl et Shaw ou Ryder ou ... On remarque seulement qu'au point d'interaction les particules entrantes sont annihilées (on attachera donc la fonction d'onde $u_\alpha(p)$ pour un fermion, $\bar{v}_\alpha(p)$ pour un antifermion et $\epsilon_\mu^{(\kappa)}(k)$ pour un photon) et les particules sortantes sont créées (soit $\bar{u}_\alpha(p)$ pour un fermion, $v_\alpha(p)$ pour un antifermion et $\epsilon_\mu^{(\kappa)}(k)$ pour un photon). Deux points d'interaction sont reliés par un propagateur.

Prop. de l'électron		$= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$
Prop. du γ (covariant)		$= -\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right)$
Vertex		$= -ie\gamma_\mu$
Electron initial		$= u_\alpha(p)$
Electron final		$= \bar{u}_\alpha(p)$
Positron initial		$= \bar{v}_\alpha(p)$
Positron final		$= v_\alpha(p)$
Photon initial		$= \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k)$
Photon final		$= \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k)$
Boucle d'électron		$\times (-1)$

Les règles de Feynman en QED (jauge covariante).

Un moyen mnémorique de se rappeler du couplage consiste à partir du lagrangien d'interaction :

$$i \int d^4x \mathcal{L}_I = i \int d^4x \bar{\psi}(x) e A_\mu(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad (2.6.79)$$

et à prendre la dérivée fonctionnelle par rapport aux champs pour trouver :

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(y)} \frac{\delta}{\delta \psi(y)} \frac{\delta}{\delta A_\mu(y)} = -i e \gamma^\mu \quad (2.6.80)$$

où le signe (-) vient de l'anticommuation $\delta/\delta\psi(y)$ avec $\bar{\psi}(x)$ lorsque l'on effectue la dérivée. Les règles générales pour obtenir vertex et propagateurs seront données en sec. 7.2 et 7.3.

Exercice : écrire l'élément \mathcal{M}_{fi} pour

- $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$
- $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$
- $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$ et montrer l'invariance de l'amplitude quand on fait la translation $\epsilon_\mu^{(\kappa)} \rightarrow \epsilon_\mu^{(\kappa)} + k_\mu$, où $\epsilon_\mu^{(\kappa)}$ et k_μ sont les vecteurs polarisation et impulsion d'un photon.

Calculer $\sum_{polarisations} |\mathcal{M}_{fi}|^2$ dans chacun des cas.

2.7 Appendice : propriétés des matrices γ^μ

Dans la représentation de Dirac les matrices γ^μ sont des matrices 4×4 définies par :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7.81)$$

où les σ^i sont les matrices de Pauli :

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.7.82)$$

Les matrices de Pauli obéissent aux relations de commutation et d'anticommutation suivantes :

$$\left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right] = i \epsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2}, \quad \left\{ \frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right\} = \delta^{ij} \frac{\mathbf{1}_2}{2} \quad (2.7.83)$$

Les matrices γ^μ ont les propriétés suivantes,

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu, \quad \gamma^{0^2} = \mathbf{1}_4, \quad \gamma^{i^2} = -\mathbf{1}_4, \quad \gamma_\mu \gamma^\mu = 4\mathbf{1}_4, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (2.7.84)$$

et elles satisfont les relations d'anticommutation :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu} \mathbf{1}_4. \quad (2.7.85)$$

Il est utile d'introduire les notations suivantes :

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \gamma^5 = \gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7.86)$$

On prouve aisément :

- $\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma^\mu = -2 \gamma_\alpha$
 - $\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\mu = 4 g_{\alpha\beta} \mathbf{1}_4$
 - $\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta \gamma^\mu = -2 \gamma_\delta \gamma_\beta \gamma_\alpha.$
- (2.7.87)

Pour l'évaluation des traces des produits de matrices $\gamma_\alpha\gamma_\beta\dots$ on a les relations :

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta) &= 4 g_{\alpha\beta} \\
\text{Tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma_\lambda) &= 4 [g_{\alpha\beta} g_{\delta\lambda} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\lambda} + g_{\alpha\lambda} g_{\beta\delta}] \\
\text{Tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta\dots) &= 0 \quad \text{pour un nombre impair de matrices} \\
\text{Tr}(\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta\dots) &= 0 \quad \text{for an odd number of } \gamma^\alpha \text{ matrices} \\
\text{Tr}(\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta) &= 0 \\
\text{Tr}(\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\delta\gamma^\lambda) &= -4i\epsilon^{\alpha\beta\delta\lambda},
\end{aligned} \tag{2.7.88}$$

où $\epsilon^{\alpha\beta\delta\lambda}$ est totalement antisymétrique sous la permutation de deux indices. Par convention on prend $\epsilon^{0123} = +1$. On a alors $\epsilon_{\alpha\beta\delta\lambda} = -\epsilon^{\alpha\beta\delta\lambda}$ et, en particulier, $\epsilon_{0123} = -1$. Une relation utile est :

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} = -2(\delta_\mu^\rho\delta_\nu^\sigma - \delta_\nu^\rho\delta_\mu^\sigma) \tag{2.7.89}$$

Il existe d'autres représentations dues à Weyl et à Majorana qui satisfont les relations éq. (2.7.85) à éq. (2.7.88). En règle générale, il n'est pas nécessaire dans les calculs d'utiliser la forme explicite des matrices γ^μ .

