## Chapitre 3

# Divergences ultraviolettes, renormalisation

Dans ce qui suit nous allons appliquer les règles de Feynman qui décrivent l'interaction entre électrons et photons (QED) et entre quarks et gluons (QCD) à l'étude des processus à haute énergie. Par exemple, si on étudie la diffusion  $e^+\mu^-$  aux deux premiers ordre de la théorie perturbative on est amené au calcul des diagrammes



La section efficace est proportionnelle à l'amplitude de diffusion au carré  $|\mathcal{M}|^2$  qui s'écrit :

$$|\mathcal{M}|^{2} = |\mathcal{M}_{0} + \mathcal{M}_{2}|^{2} + |\mathcal{M}_{1}|^{2}$$
  
=  $|\mathcal{M}_{0}|^{2} + |\mathcal{M}_{1}|^{2} + 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_{0} \mathcal{M}_{2}^{*} + \mathcal{O}(e^{8}).$ 

Le premier terme est d'ordre  $e^4$ , les deux suivants d'ordre  $e^6$ . On négligera  $|\mathcal{M}_2|^2$  qui est d'ordre  $e^8$ , donc d'un ordre plus élevé.

## • Nomenclature

Les termes d'ordre le plus bas sont habituellement appelés "termes de Born". Les diagrammes avec une ou plusieurs particules émises, en plus de celles présentes dans le terme de Born, sont dits "diagrammes réels", tandis que ceux avec un champ émis et ré-absorbé dans le même diagramme sont dits "diagrammes virtuels" ou en "boucles". Un calcul cohérent en théorie des perturbations nécessite la prise en compte de tous les diagrammes à un ordre donné, ainsi, évidemment, que de tous ceux d'ordre plus bas. Dans la suite, nous ne considérerons que les deux premiers ordres de la série perturbative, c'est-à-dire, dans l'exemple ci-dessus, les termes d'ordre  $e^4$  et  $e^6$  de l'élément de matrice au carré.

L'évaluation des diagrammes d'ordre supérieur présente de nombreuses difficultés à cause de l'apparition de divergences.

Dans les diagrammes en boucles ces divergences peuvent être de trois types :

- ultraviolettes (UV) qui reflètent le comportement aux courtes distances ou grandes impulsions de la théorie; elles n'apparaissent que dans les termes virtuels où l'impulsion dans la boucle n'a pas de limite supérieure. Pour les diagrammes réels il n'y a pas de divergences ultraviolettes puisque l'énergie des particules finales est nécessairement finie (on calcule des processus à énergie finie);
- infrarouges (IR) qui sont engendrées lorsque l'impulsion d'un photon ou d'un gluon réel ou virtuel tend vers 0; elles reflètent le comportement de la théorie aux petites énergies ou grandes distances;
- colinéaires lorsque l'on considre un fermion de masse nulle emettant un photon ou un gluon d'impulsion parallèle à celle du fermion.

Chaque type de divergence fait l'objet d'une procédure spécifique :

- La renormalisation permet d'évacuer les divergences ultraviolettes au prix d'une redéfinition des paramètres du lagrangien et permet de construire un développement perturbatif à coefficients finis (chapitres 3, 4, 8);
- les divergences infrarouges sont éliminées, ordre par ordre, en combinant termes réels et virtuels lorsqu'on construit un observable : c'est le *théorème de Lee-Kinoshita-Nauenberg* (chapitre 5);
- les divergences colinéaires sont une caractéristique de QCD où on suppose les quarks légers de masse nulle : elles sont absorbées dans les fonctions de structure (objets non-perturbatifs) qui donnent la distribution des quarks et gluons dans un hadron : c'est le théorème de factorisation (chapitres 6, 9, 10).

Dans le reste du chapitre nous nous intéresserons, de façon "qualitative", aux divergences ultraviolettes et à la procédure de renormalisation qui permet de donner un sens à la théorie et par conséquent d'obtenir des prédictions finies. Nous illustrerons d'abord la procédure de renormalisation sur un modèle scalaire (pas de complication due au spin) . Nous introduirons ensuite les outils qui permettent de calculer les diagrammes en boucles et de donner un sens mathématique aux divergences.



FIGURE 3.1 – Diffusion  $2 \rightarrow 2$  à une boucle dans le modèle  $\lambda \phi^4$ . Les invariants de Mandelstam sont  $(p_1 - p_3)^2 = q^2 = t$ ,  $(p_1 + p_2)^2 = s$ ,  $(p_1 - p_4)^2 = u$ .

## 3.1 Divergences ultraviolettes et renormalisation en $\lambda \phi^4$ .

## 3.1.1 Divergences des diagrammes en boucle

La densité lagrangienne du modèle  $\lambda \phi^4$  est :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi(x))^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2(x) - \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x)$$
(3.1.1)

où  $\phi(x)$  est un champ scalaire réel. Les règles de Feynman correspondantes sont :

vertex : 
$$\times = -i\lambda$$
; propagateur :  $----= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ 

Aux deux premiers ordres de la théorie des perturbations la diffusion de deux particules est représentée par les diagrammes de la figure 3.1. À noter que pour les besoins de notre discussion qualitative il n'est pas nécessaire de considérer les diagrammes avec insertion d'une boucle sur les pattes externes du terme de Born. Si on dénote  $q = p_1 - p_3$  l'impulsion de transfert entre particules entrante et sortante on a  $q^2 = t < 0$ . L'amplitude de diffusion s'écrit :

$$\mathcal{M} = -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p+q)^2 - m^2 + i\epsilon)} + \dots$$
(3.1.2)

où p est l'impulsion dans la boucle et où "..." dénote la contribution des deux derniers diagrammes (le facteur 1/2 devant l'intégrale tient compte du fait des particules identiques dans la boucle). Il faut intégrer, dans le deuxième terme du membre de droite sur une région où toutes les composantes de l'impulsion interne p tendent vers l'infini, que l'on dénote schématiquement par  $|p| \to \infty$ . Une analyse dimensionnelle élémentaire montre que, dans ce domaine, la contribution dominante sera :

$$\frac{\lambda^2}{2} \int_{|p| \to \infty} \frac{d^4 p}{p^4} \sim \frac{\lambda^2}{2} \int_{|p| \to \infty} \frac{p^3 dp}{p^4}$$
(3.1.3)

qui diverge logarithmiquement (on a ignoré la contributions angulaire dans l'intégrale). Pour régulariser la divergence ultraviolette de cette intégrale on introduit un cut-off  $\Lambda$  sur la norme de p de telle sorte que l'amplitude de diffusion peut s'écrire :

$$\mathcal{M} = -i\lambda + i\frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^2} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{-q^2} + \text{ termes finis} \right).$$
(3.1.4)

où  $-q^2$  agit comme un cut-off de l'intégrand quand l'impulsion p est petite et où nous définissons comme termes finis les termes indépendants du cut-off  $\Lambda^1$ . Chaque diagramme en boucle donnant une contribution  $\sim \ln \frac{\Lambda^2}{-q^2}$ , on a donc introduit un facteur 3. On a aussi fait l'hypothèse dans la dernière équation ci-dessus que  $-q^2 >> m^2$ . Le résultat du calcul dépend de l'invariant physique  $q^2$  et du cut-off ultraviolet arbitraire  $\Lambda$ . On le notera donc :

$$-ig(q^2,\Lambda^2) = -i\lambda + \frac{3i}{2}\frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \left(\ln\frac{\Lambda^2}{-q^2} + \text{ termes finis}\right), \qquad (3.1.5)$$

pour faire apparaître explicitement ces dépendances. Le module  $| |^2$  du membre de gauche est relié à la section efficace qui est une observable. On a donc le résultat paradoxal que la prédiction théorique de la section efficace dépend d'un cut-off non physique, introduit pour régulariser les expressions mathématiques !

Si on considère maintenant le même processus à l'échelle  $q'^2$ , la prédiction régularisée est évidemment :

$$g(q'^2, \Lambda^2) = \lambda - \frac{3}{2} \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{-q'^2} + \text{ termes finis} \right).$$
(3.1.6)

Eliminant  $\lambda$  à l'aide de l'équation (3.1.5) on a :

$$g(q^{2}, \Lambda^{2}) = g(q^{2}, \Lambda^{2}) + \frac{3}{2} \frac{g^{2}}{(4\pi)^{2}} \ln \frac{-q^{2}}{-q^{2}} + \text{ termes finis d'ordre } g^{2} + \mathcal{O}(g^{3})$$
(3.1.7)

Dans le terme en  $\lambda^2$  on a substitué  $\lambda = g + \mathcal{O}(g^2)$  ce qui est tout à fait justifié puisque le calcul est mené aux deux premiers ordres de la théorie des perturbations et que l'on néglige les termes d'ordre supérieur en  $\lambda^3 \sim g^3$ .

## • Ré-interprétation de la série perturbative

Il est remarquable que dans l'expression (3.1.7) toute dépendence explicite en  $\Lambda$  a disparu. Ceci suggère d'interpéter cette équation de la façon suivante. On suppose que l'on fait une expérience de diffusion et que l'on mesure la section efficace à une impulsion de transfert  $\sqrt{-q^2}$ : reliant le résultat

<sup>1.</sup> L'origine du factor i devant le deuxième terme deviendra évidente dans la section suivante.

47

de cette mesure à  $g(q^2)$ , on obtient la valeur de  $g(q^2)$ . La théorie prédit alors, par l'équation (3.1.7), quel sera le résultat d'une expérience à  $q'^2$ , la relation entre les deux fonctions  $g(q^2)$  et  $g(q'^2)$  étant finie, indépendante du cut-off  $\Lambda$ .

En général, la série perturbative pour une quantité physique, par exemple  $g(q'^2)$  où  $q'^2$  est une échelle qui caractérise l'énergie du processus étudié, construite à l'aide du paramètre  $\lambda$  ( $\lambda$  couplage dans le lagrangien) n'est pas bien définie car les coefficients du développement sont dépendants du cut-off non physique  $\Lambda$ , introduit pour régulariser les divergences ultraviolettes. En revanche, la série perturbative pour  $g(q'^2)$  construite à l'aide de  $g(q^2)$ ,  $(q^2 \neq q'^2)$  est parfaitement définie, les coefficients de la série étant finis. Ce que prédit la théorie n'est donc pas la valeur de l'amplitude de diffusion, en fonction de  $\lambda$  et des autres paramètres du lagrangien, mais seulement la variation de l'amplitude avec l'échelle d'énergie, connaissant cette amplitude à une énergie donnée.

#### • Définitions, nomenclature

Le paramètre de couplage  $\lambda$  dans le lagrangien est appelé le "couplage nu" : suivant la tradition on le notera  $\lambda_B$  (bare = nu en anglais). On introduit un "couplage renormalisé" dénoté  $\lambda_R$  fonction de l'échelle  $q^2$  du processus étudié : par exemple  $g(q^2)$  joue le rôle du couplage renormalisé dans la discussion ci-dessus. La relation entre les deux couplages est écrite (*renormalisation multiplicative*) :

$$\lambda_B = Z_\lambda \ \lambda_R \tag{3.1.8}$$

où le facteur  $Z_\lambda$  admet un développement perturbatif à "coefficients divergents"  $^2$  :

$$Z_{\lambda} = 1 + c_{\lambda} \ \lambda_R. \tag{3.1.9}$$

Par exemple, inversant l'éq. (3.1.5) on obtient :

$$\lambda_B = g(q^2) \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{g(q^2)}{(4\pi)^2} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{-q^2} + \text{ termes finis} \right) \right], \qquad (3.1.10)$$

qui définit la relation entre couplage nu et "couplage renormalisé"  $g(q^2)$ : dans ce cas  $c_{\lambda} = (3g(q^2)/2(4\pi)^2) \left(\ln(\Lambda^2/-q^2) + \text{ termes finis}\right)$ . Plus simplement on peut ne garder que les termes divergents dans la relation entre couplages nu et renormalisé et définir  $\lambda_R(q^2)$  par :

$$\lambda_B = \lambda_R(q^2) \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{\lambda_R(q^2)}{(4\pi)^2} \ln \frac{\Lambda^2}{-q^2} \right], \qquad (3.1.11)$$

soit :

$$c_{\lambda} = \frac{3}{2(4\pi)^2} \ln \frac{\Lambda^2}{-q^2}.$$
 (3.1.12)

En résumé, si l'on construit la série à l'aide de  $\lambda_B$  on a :

$$g(q'^2) = \lambda_B + \frac{3}{2} \frac{\lambda_B^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{-q'^2}{\Lambda^2} + \text{ terms finis d'ordre } \lambda_B^2$$
(3.1.13)

<sup>2.</sup> Si la théorie est renormalisable  $Z_{\lambda}$  admet un développement à tous les ordres. Dans notre discussion (approximation à une boucle) il suffit de garder les deux premiers termes.

où  $\lambda_B$  est la contribution du diagramme en arbre tandis que le terme en  $\lambda_B^2$  vient des diagrammes à une boucle. Si on l'exprime en termes de  $\lambda_R$  on aura, utilisant les éqs. (3.1.11) et (3.1.13) :

$$g(q'^2) = \left[\lambda_R(q^2) + \frac{3}{2}\frac{\lambda_R^2}{(4\pi)^2}\ln\frac{\Lambda^2}{-q^2}\right] + \frac{3}{2}\frac{\lambda_R^2}{(4\pi)^2}\ln\frac{-q'^2}{\Lambda^2} + \text{ termes finis d'ordre } \lambda_R^2 + \mathcal{O}(\lambda_R^3). \quad (3.1.14)$$

Le facteur entre [] est la contribution du terme en arbre, exprimé en fonction du couplage renormalisé : le premier terme est le diagramme en arbre renormalisé tandis que le second est la contribution du *contre-terme* dont le rôle est de compenser la divergence venant des diagrammes en boucles. Le développement en fonction de  $\lambda_R$  de l'élément de matrice (ou d'une quantité physique) est à coefficients finis, à tous les ordres, si la théorie est renormalisable. Le prix à payer est que, dans notre exemple,  $\lambda_R(q^2)$  doit être obtenu à partir de l'expérience.

La forme (3.1.14) est la forme sous laquelle on va construire la série perturbative, c'est-à-dire directement en fonction du couplage renormalisé, défini par rapport au couplage nu par une relation de type éq. (3.1.8). Pour cela, on doit réorganiser le lagrangien pour faire apparatre  $\lambda_R$  au lieu de  $\lambda_B$ . La différence entre couplage nu et renormalisé est appelé *contre-terme* et ce dernier est choisi pour compenser les divergences ultraviolettes des diagrammes en boucles.

## 3.1.2 Principes de la procédure de renormalisation

Une analyse systématique montre qu'il faut aussi introduire une masse renormalisée et un champ renormalisé. Par exemple, considérant le propagateur et la correction à une boucle associée, on trouve que le terme en boucle est divergent dans l'ultraviolet ce qui implique, comme on le verra dans la section suivante, qu'il faut renormaliser le paramètre de masse et éventuellement la fonction d'onde pour donner un sens à la théorie perturbative. En fait, pour chaque paramètre, dit paramètre nu, apparaissant dans le lagrangien il faut introduire son équivalent renormalisé. On écrit donc la densité lagrangienne :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi_B)^2 - \frac{m_B^2}{2} \phi_B^2 - \frac{\lambda_B}{4!} \phi_B^4$$
(3.1.15)

où l'indice B dénote les quantités nues. On exprime la relation entre paramètres nus et les paramètres renormalisés par une généralisation de l'équation (3.1.8) :

$$\begin{aligned}
\phi_B &= Z_3^{1/2} \phi_R \\
m_B^2 &= Z_m m_R^2 \\
\lambda_B &= Z_\lambda \lambda_R.
\end{aligned}$$
(3.1.16)

Les  $\phi_R$ ,  $m_R$  et  $\lambda_R$  sont les quantités renormalisées. Pour des raisons qui vont devenir évidentes, on écrit habituellement :

$$Z_m = \frac{Z_0}{Z_3} , \ Z_\lambda = \frac{Z_1}{Z_3^2}$$
 (3.1.17)

Les  $Z_i$  sont de la forme éq. (3.1.9), c'est-à-dire qu'ils admettent un développement perturbatif en  $\lambda_R$ . Pour calculer les boucles on introduit une procédure de régularisation qui donne un sens mathématique aux divergences ultraviolettes. Ci-dessus on a introduit un cut-off  $\Lambda$ , méthode qui n'est pas recommandée car elle brise l'invariance de Lorentz. Pour QED, QCD, l'approche moderne consiste à travailler en  $n \neq 4$  dimensions (voir section suivante). Puisque l'on veut travailler directement avec les quantités renormalisées on va ré-écrire le lagrangien en fonction des  $\phi_R$ ,  $m_R$ ,  $\lambda_R$ . On trouve immédiatement :

$$\mathcal{L} = \frac{Z_3}{2} (\partial_\mu \phi_R)^2 - \frac{Z_0}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{Z_1}{4!} \lambda_R \phi_R^4$$
(3.1.18)

Il est naturel d'écrire

$$Z_i = 1 + \delta Z_i, \quad \text{avec } i = 0, 1, 3$$
 (3.1.19)

où les contre-termes  $\delta Z_i$  sont exprimés sous la forme d'une série perturbative,  $\delta Z_i = \sum_n c_i^{(n)} \lambda_R^n$ . Le lagrangien s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \delta \mathcal{L} \tag{3.1.20}$$

avec :

$$\mathcal{L}_R = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_R)^2 - \frac{m_R^2}{2} \phi_R^2 - \frac{\lambda_R}{4!} \phi_R^4$$
(3.1.21)

et:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\delta Z_3}{2} (\partial_\mu \phi_R)^2 - \frac{\delta Z_0}{2} m_R^2 \ \phi_R^2 - \frac{\delta Z_1}{4!} \lambda_R \ \phi_R^4. \tag{3.1.22}$$

Par définition,  $\mathcal{L}_R$  est identique à  $\mathcal{L}$  sauf qu'il est exprimé en fonction des quantités renormalisées tandis que  $\delta \mathcal{L}$  contient les *contre-termes*. Pour un calcul à l'approximation d'une boucle on ne gardera que le premier terme du développement perturbatif des  $\delta Z_i$ . Au lieu maintenant de construire la série perturbative à partir de la forme éq. (3.1.15), comme on l'a fait dans l'exemple précédent, on va la construire à partir de la décomposition éq. (3.1.20) de la densité lagrangienne sans supposer à priori la valeur des contre-termes. Les règles de Feynman pour  $\mathcal{L}_R$  sont les mêmes que celles pour  $\mathcal{L}$  sous la forme éq. (3.1.15), sauf qu'elles concernent maintenant les quantités renormalisées. Il faudra alors ajouter la contribution des *contre-termes* qui sont traités comme de *nouveaux couplages* et correspondent à de *nouveaux diagrammes de Feynman*. Pour les obtenir<sup>3</sup>, une recette est de considérer, comme en éq. (2.6.79), l'expression<sup>4</sup>:

$$i \int d^4x \,\delta\mathcal{L} = i \int d^4x \left[ -\frac{\delta Z_3}{2} \,\phi_R \,\partial^2\phi_R - \frac{\delta Z_0}{2} \,m_R^2 \,\phi_R^2 - \frac{\delta Z_1}{4!} \,\lambda_R \,\phi_R^4 \right].$$
(3.1.23)

Introduisant  $\phi_R(x) = \int dp \phi_R(p) \exp(-ipx)$  (on utilise la notation simplifiée  $dp = d^4 p/(2\pi^4)$ ) l'expression ci-dessus devient (après intégration sur x qui fait sortir le facteur de conservation d'énergie-impulsion) :

$$\int dp_1 dp_2 \delta(p_1 + p_2) \left[ i \frac{\delta Z_3}{2} p_1^2 - i \frac{\delta Z_0}{2} m_R^2 \right] \phi_R(p_1) \phi_R(p_2)$$
  
$$\int dp_1 dp_2 dp_3 dp_4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \left[ -i \frac{\delta Z_1}{4!} \lambda_R \right] \phi_R(p_1) \phi_R(p_2) \phi_R(p_3) \phi_R(p_4). \quad (3.1.24)$$

<sup>3.</sup> Voir sec. (7.2) pour une dérivation scientifique.

<sup>4.</sup> On ré-écrit  $(\partial_{\mu}\phi_R)^2 = -\phi_R \partial^2 \phi_R$  à une dérivée totale près qui ne contribue pas à l'intégrale  $\int d^4x$ .

Prenant la dérivée  $(\delta/\delta\phi_R(p))$  autant de fois que nécessaire et factorisant les fonctions  $\delta$  de conservation d'impulsion on obtient les règles suivantes :

$$= i p^{2} \delta Z_{3}, \quad \text{contre-terme de la fonction d'onde}$$

$$= -i m_{R}^{2} \delta Z_{0}, \quad \text{contre-terme de masse}$$

$$= -i \lambda_{R} \delta Z_{1}, \quad \text{contre-terme du vertex}$$

$$(3.1.25)$$

Par exemple, pour la fonction à 4-points déjà considérée on aura à calculer la série de diagrammes de la fig. 3.2 où, dans ce cas, seul le contre-terme de vertex entre en jeu. L'application des règles



FIGURE 3.2 – La fonction à 4-points à une boucle en terme des quantités renormalisées.

de Feynman donne alors,

$$-ig(q'^2) = -i\lambda_R + i\frac{3}{2(4\pi)^2}\ln\frac{\Lambda^2}{-q'^2}\lambda_R^2 + \text{ termes finis d'ordre }\lambda_R^2 - i\delta Z_1\lambda_R \qquad (3.1.26)$$

où les boucles contribuent les deuxième terme et troisème termes du membre de droite tandis que le contre-terme de vertex est le dernier. Puisque la séparation du lagrangien initial entre  $\mathcal{L}_R$  et  $\delta \mathcal{L}$  est arbitraire on est libre de choisir, par exemple,  $\delta Z_1 = (3/2(4\pi)^2) \ln(\Lambda^2/(-q^2))\lambda_R(q^2)$  qui compense la divergence ultraviolette et l'on trouve :

$$g(q'^2) = \lambda_R(q^2) + \frac{3}{2(4\pi)^2} \ln \frac{-q'^2}{-q^2} \lambda_R^2 + \text{ termes finis d'ordre } \lambda_R^2 \qquad (3.1.27)$$
  

$$g(q^2) = \lambda_R(q^2) + \text{ termes finis d'ordre } \lambda_R^2.$$

Le couplage renormalisé  $\lambda_R$  peut être déterminé, à une valeur particulière  $q^2$ , par comparaison avec les données via la deuxième des équations ci-dessus. On dit alors qu'on a renormalisé la théorie à  $q^2$ . C'est un exercice intéressant de s'assurer que si on "renormalise" le couplage à une valeur différente,  $q_0^2$  au lieu de  $q^2$  par exemple, on aura une valeur du couplage renormalisé  $\lambda_{R_0}$  différente mais la prédiction pour  $g(q'^2)$  sera (perturbativement) inchangée.

Une condition nécessaire pour que la théorie soit renormalisable est que les divergences des diagrammes d'ordre supérieur aient la même forme/structure que les termes du lagrangien de sorte qu'elles puissent être compensées par les contre-termes. Ainsi, les prédictions obtenues à partir de la forme éq. (3.1.20) de la densité lagrangienne seront finies par un choix approprié des  $\delta Z_i$ . Il est important de noter que le couplage renormalisé est fonction de l'échelle de masse  $q^2$  puisque  $\delta Z_{\lambda}$  est lui même fonction de  $q^2$  mais  $\lambda_B = (1+\delta Z_\lambda)\lambda_R(q^2)$  en est indépendant.

Dans la procédure de renormalisation que nous suivrons pour QCD, les contre-termes seront choisis sans faire référence à un processus "physique", contrairement à ce qui est fait dans la discussion ci-dessus, mais ils seront choisis de façon la plus commode pour éliminer les divergences associées aux boucles. Comme on peut toujours arbitrairement ajouter des termes finis aux contre-termes, ou changer la valeur du point  $-q^2$  où on "soustrait" la divervence ultraviolette, on définit ainsi de nombreux schémas de renormalisation. A l'ordre auquel on conduit le calcul tous les schémas de renormalisation sont équivalents : ils conduisent au même résultat pour le calcul d'une quantité physique.

En résumé, renormaliser une théorie c'est choisir les contre-termes de telle sorte que la série perturbative exprimée en fonction des paramètres renormalisés soit à coefficients finis. Si la théorie est renormalisable tous les observables peuvent alors s'exprimer par une série dont les coefficients ne contiennent pas de divergences ultraviolettes.

## 3.1.3 Renormalisation de la masse et de la fonction d'onde

Avant de d'entrer dans les détails de la procédure il est utile de rappeler la relation entre le champ  $\phi(x)$  et le propagateur de Feynman défini comme le produit chronologique :

$$\widetilde{G}(x-y) = \langle 0|\mathcal{T}\phi(x) \phi(y)|0 \rangle 
= \theta(x_0-y_0) \langle 0|\phi(x) \phi(y)|0 \rangle + \theta(y_0-x_0) \langle 0|\phi(y) \phi(x)|0 \rangle. \quad (3.1.28)$$

On considère le champ nu  $\phi_B$  que l'on développe en ondes planes,

$$\phi_B(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} (a_p \ e^{-ip \cdot x} + a_p^{\dagger} e^{ip \cdot x})$$
(3.1.29)

où  $p = (\omega_p, \vec{p}), \ \omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m_B^2}, \ p \cdot x = \omega_p x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$ . Les opérateurs de création et annihilation satisfont les relations de commutation usuelles,

$$[a_p, a_{p'}^{\dagger}] = (2\pi)^3 \,\,\delta^{(3)}(p - p') \,\,2\omega_p, \qquad (3.1.30)$$

qui fixe aussi la normalisation du champ  $\phi_B(x)$ . Suivant la procédure mise en oeuvre pour le fermion au chapitre précédent on trouve :

$$\widetilde{G}(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} (\theta(x_0-y_0) \ e^{-i\omega_p(x_0-y_0)+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} + \theta(y_0-x_0) \ e^{i\omega_p(x_0-y_0)-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}) 
= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \frac{idp_0}{2\pi} \left[ \frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{p_0-\omega_p+i\epsilon} - \frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{p_0+\omega_p-i\epsilon} \right],$$
(3.1.31)

où pour obtenir la dernière équation on a utilisé la représentation intégrale suivante (éqs. (2.3.41) et (2.3.42)),

$$\theta(\pm(x_0 - y_0)) \ e^{\mp i\omega_p(x_0 - y_0)} = \mp \frac{1}{2\pi i} \ \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 \frac{e^{-ip_0(x_0 - y_0)}}{p_0 \mp \omega_p \pm i\epsilon}.$$
(3.1.32)

Combinant les termes entre crochets dans l'expression du propagateur et simplifiant on arrive alors à :

$$\widetilde{G}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i}{p^2 - m_B^2 + i\epsilon}.$$
(3.1.33)

Sous cette forme, il faut noter que  $p \cdot (x-y) = p_0(x_0 - y_0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})$  avec  $p_0 \neq \omega_p$ , l'impulsion p est hors couche de masse :  $p^2 \neq m_B^2$ . On obtient alors trivialement la forme générale du propagateur de Feynman dans l'espace des impulsions, qui est donc le transformé de Fourier de l'éq. (3.1.28) :

$$G(p) = \frac{i}{p^2 - m_B^2 + i\epsilon}.$$
(3.1.34)

### • Relation entre les propagateurs des champs nu et renormalisé : cas libre

On introduit plusieurs propagateurs du champ libre dans l'espace des impulsions. Celui du champ nu, construit à partir des deux premiers termes du lagrangien éq. (3.1.15) est le transformé de Fourier de  $\langle 0|\mathcal{T}\phi_B(x) \phi_B(y)|0 \rangle$ :

$$G_B(p) = \frac{i}{p^2 - m_B^2 + i\epsilon}.$$
(3.1.35)

Il y a également le propagateur du champ renormalisé qui, lui, est donné par :

$$G_R(p) = Z_3^{-1} G_B(p), (3.1.36)$$

puisque  $\phi_R(x) = Z_3^{-1/2} \phi_B(x)$  d'après la première des éqs. (3.1.16). Ce propagateur s'écrit donc simplement :

$$G_R(p) = \frac{i Z_3^{-1}}{p^2 - m_B^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{i Z_3^{-1}}{p^2 - (Z_0/Z_3)m_R^2 + i\epsilon}$$
(3.1.37)

où on a introduit le paramètre  $m_R$  d'après les éqs. (3.1.16, 3.1.17). Finalement il vient :

$$G_R(p) = \frac{i (1 - \delta Z_3)}{p^2 - m_R^2 (1 + \delta Z_0 - \delta Z_3) + i\epsilon},$$
(3.1.38)

Le facteur  $(1-\delta Z_3)$  au numérateur relie la normalisation du champ renormalisé à celle du champ nu. Comparant avec l'éq. (3.1.37) on voit que la combinaison  $m_R^2(1+\delta Z_0-\delta Z_3)$ , pôle du propagateur du champ renormalisé, est indépendant du schéma de renormalisation, en d'autres termes la procédure de renormalisation n'affecte pas la position du pôle du propagateur renormalisé. Finalement, on introduit le propagateur obtenu à partir des deux premiers termes de la densité lagrangienne  $\mathcal{L}_R$ de l'éq. (3.1.21) :

$$G(p) = \frac{i}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon}.$$
(3.1.39)

C'est le propagateur libre du lagrangien  $\mathcal{L}_R$ : pour être cohérent avec le lagrangian initial  $\mathcal{L}$  il doit toujours être utilisé en association avec les contre-termes correspondants. C'est un intermédiaire

de calcul qui servira à construire le propagateur renormalisé de la théorie en interaction, comme on va maintenant le voir.

## • Propagateur du champ en interaction

On construit maintenant le propagateur du champ en interaction dans l'approximation à une boucle. Pour cela on part du lagrangien sous la forme éq. (3.1.20),  $\mathcal{L}_R + \delta \mathcal{L}$ . A l'ordre le plus bas on a le terme (3.1.39) auquel il faudra ajouter la correction à une boucle et l'insertion des contre-termes de  $\delta \mathcal{L}$  associés à la fonction à 2-points. On doit donc inclure les diagrammes de la fig. 3.3, où



FIGURE 3.3 – Le propagateur à une boucle en terme des quantités renormalisées.

 $\Pi^{\text{boucle}}(p^2, m_R^2)$ , d'ordre  $\mathcal{O}(\lambda_R)$ , est la contribution de la boucle en général divergente. Le premier terme est le propagateur obtenu à partir de  $\mathcal{L}_R$ , éq. (3.1.21), soit,

$$G(p) = \frac{i}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon}.$$
(3.1.40)

Incluant tous les termes de la figure, le résultat à une boucle s'écrit :

$$G^{(1)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon} (-i \Pi^{\text{boucle}}(p^2, m_R^2) + i p^2 \,\delta Z_3 - i \,m_R^2 \,\delta Z_0) \frac{i}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon}$$
(3.1.41)

Dénotant la totalité des termes d'ordre supérieur par :

$$\Pi(p^2, m_R^2) = \Pi^{\text{boucle}}(p^2, m_R^2) - p^2 \,\delta Z_3 + m_R^2 \,\delta Z_0 \tag{3.1.42}$$

le propagateur prend la forme :

$$G^{(1)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon} \left[ 1 + \frac{\Pi(p^2, m_R^2)}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon} \right]$$
  
=  $\frac{i}{p^2 - m_R^2 - \Pi(p^2, m_R^2) + i\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda_R^2)$  (3.1.43)

où on n'a gardé que les termes d'ordre  $\lambda_R$  (la dernière ligne revient en fait à sommer l'insertion  $\Pi(p^2, m_R^2)$  à tous les ordres de la théorie des perturbations). Afin d'étudier le comportement du propagateur près du pôle il est traditionnel de faire le développement :

$$\Pi^{\text{boucle}}(p^2, m_R^2) = \Pi^{\text{boucle}}(m_R^2, m_R^2) + (p^2 - m_R^2) \frac{d\Pi^{\text{boucle}}}{dp^2} \Big|_{m_R^2}$$
(3.1.44)

de telle sorte que le propagateur devient :

$$G^{(1)}(p) = \frac{i}{(p^2 - m_R^2)(1 - d\Pi^{\text{boucle}}/dp^2|_{m_R^2} + \delta Z_3) - \Pi^{\text{boucle}}(m_R^2, m_R^2) - m_R^2(\delta Z_0 - \delta Z_3) + i\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda_R^2)$$
$$= \frac{i}{[p^2 - m_R^2 - \Pi^{\text{boucle}}(m_R^2, m_R^2) - m_R^2(\delta Z_0 - \delta Z_3)] [1 + \delta Z_3 - d\Pi^{\text{boucle}}/dp^2|_{m_R^2}] + i\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda_R^2)$$
(3.1.45)

Les équations ci-dessus sont équivalentes au sens perturbatif car elles diffèrent par des termes d'ordre supérieur à celui auquel on a mené le calcul. Finalement, le propagateur renormalisé incluant les corrections à une boucle prend la forme :

$$G^{(1)}(p) = i \frac{1 - \delta Z_3 + d\Pi^{\text{boucle}} / dp^2|_{m_R^2}}{p^2 - m_R^2 (1 + \delta Z_0 - \delta Z_3) - \Pi^{\text{boucle}} (m_R^2, m_R^2) + i\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda_R^2).$$
(3.1.46)

On remarque qu'après ce raisonement standard mais un peu lourd on retrouve la structure en contretermes dérivée très simplement en (3.1.38). En général, les corrections à une boucle  $\Pi^{\text{boucle}}(m_R^2, m_R^2)$ et  $d\Pi^{\text{boucle}}/dp^2|_{m_R^2}$  ont une divergence ultraviolette qui sera éliminée par un choix approprié des contres-termes<sup>5</sup>. Un choix de schéma de renormalisation possible est par exemple (schéma physique ou sur-couche ou on-shell),

$$\delta Z_3 = \frac{d\Pi^{\text{boucle}}}{dp^2} \Big|_{m_R^2} \\ \delta Z_0 : m_R^2 (1 + \delta Z_0 - \delta Z_3) + \Pi^{\text{boucle}} (m_R^2, m_R^2) = m_{\text{phys}}^2, \qquad (3.1.47)$$

de telle sorte que le propagateur, incluant les corrections, est

$$G^{(1)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_{\text{phys}}^2 + i\epsilon}$$
 (3.1.48)

Plus généralement, on peut choisir comme conditions de renormalisation :

$$-\delta Z_3 + \frac{d\Pi^{\text{boucle}}}{dp^2}|_{m_R^2} \sim \text{fini}$$
  
$$m_R^2 (1 + \delta Z_0 - \delta Z_3) + \Pi^{\text{boucle}} (m_R^2, m_R^2) \sim \text{fini.}$$
(3.1.49)

On montrera explicitement plus bas que la combinaison :

$$m_R^2 (1 + \delta Z_0 - \delta Z_3) + \Pi^{\text{boucle}}(m_R^2, m_R^2)$$
(3.1.50)

ne dépend pas du schéma de renormalisation : c'est donc un invariant. Le pôle du propagateur qui définit la masse physique de la particule est donc bien indépendant du schéma.

<sup>5.</sup> Dans le modèle  $\lambda \phi^4$  on verra que la fonction  $\Pi^{\text{boucle}}(p^2, m_R^2)$ , à une boucle, est indépendante de  $p^2$ , donc la dérivée par rapport à  $p^2$  est nulle et la fonction d'onde n'est pas renormalisée puisque  $\delta Z_3$  est alors égal à 0.

## 3.1.4 Conséquence de la procédure de renormalisation : couplage mobile

Revenant à l'équation (3.1.11) on a le choix de définir la constante de couplage renormalisée à  $q^2$  ou à  $q'^2 = q^2 + \delta q^2$ . La relation entre les deux couplages est :

$$\lambda_R(q^2 + \delta q^2) = \lambda_R(q^2) + c \,\lambda_R^2(q^2) \,\ln(1 + \frac{\delta q^2}{q^2}) + \mathcal{O}(\lambda_R^3),$$

avec

$$c = \frac{3}{2(4\pi)^2}$$
 en théorie  $\lambda \phi^4$ ,

soit

$$\delta\lambda_R(q^2) = c \; \lambda_R^2(q^2) \; \frac{\delta q^2}{q^2} + \mathcal{O}(\lambda_R^3) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\delta\lambda_R}{\lambda_R^2} = c \; \frac{\delta q^2}{q^2} + \mathcal{O}(\lambda_R)$$

En intégrant on obtient :

$$\lambda_R(q^2) = \frac{\lambda_R(q_0^2)}{1 - c \,\lambda_R(q_0^2) \ln(q^2/q_0^2)} + \mathcal{O}(\lambda_R^3).$$
(3.1.51)

Ceci est la forme générique de la dépendance en l'échelle de masse du couplage renormalisé dans une théorie renormalisable. C'est ce que l'on appelle le "couplage mobile" (running coupling). Si on considère deux schémas de renormalisation, l'un où on normalise la théorie au point  $q_0^2$  et l'autre au point  $q^2$ , alors les deux couplages  $\lambda_R(q_0^2)$  et  $\lambda_R(q^2)$  sont reliés par l'éq. (3.1.51) : cela garantit que les prédictions fondées sur ces deux schémas sont identiques. On revient sur ce point dans le chapitre suivant.

## • Exemples

La figure ci-dessous illustre le cas des théories  $\lambda \phi^4$  et QED où le couplage croît avec l'énergie, c'est-à-dire que la constante *c* dans l'éq. (3.1.51) est positive. On peut noter l'existence d'un pôle dans le couplage mobile : le pôle de Landau. En QED la position du pôle est :

$$\sqrt{q_{\rm Landau}^2} \sim m_e \ 10^{280}.$$

L'échelle d'énergie correspondante peut être comparée à la masse baryonique de l'univers observable qui est estimée à :

$$M_{\rm univers} \sim m_e \ 10^{82}$$



Le monde physique est heureusement loin du pôle de Landau! En fait, dans le cadre de l'unification des interactions faible et electromagnétique, à une échelle d'énergie de l'ordre du TeV, le couplage de la théorie unifiée est caractéristique d'une théorie non abélienne et le couplage est asymptotiquement décroissant.

En revanche, le cas c < 0 s'applique à la théorie  $\lambda \phi^3$  à six dimensions, à QCD et au modèle de Weinberg-Salam. Le couplage décroît quand l'énergie augmente et la théorie est dite "asymptotiquement libre" puisque le couplage s'annule quand  $|q^2| \to \infty$ .



Si maintenant l'énergie décroît, le couplage augmente et pour QCD, par exemple, il devient  $\simeq 1$  pour des masses de l'ordre du GeV : on entre dans la région du "confinement" où la théorie des perturbations n'est plus applicable.

## 3.1.5 Discussion

L'origine des divergences ultraviolettes est lié au fait que l'on suppose la théorie valable quelque soit l'échelle d'énergie considérée, en particulier quand  $|q^2| \rightarrow \infty$ . Par les relations d'incertitude de Heisenberg,

$$\Delta E \ \Delta l \sim 0.2 \ \text{GeV fm},\tag{3.1.52}$$

cela correspond à des distances infiniment petites. Ceci est à contraster avec la situation habituelle en physique où les lois ont un domaine de validité limité. Par exemple, pour

- la physique atomique :  $\Delta E \sim 2 \text{ eV} \Leftrightarrow \Delta l \simeq 1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$
- la physique nucléaire :  $\Delta E \sim 200 \text{ MeV} \Leftrightarrow \Delta l \simeq 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$
- physique des particules :  $\Delta E \ge 20 \text{ GeV} \Leftrightarrow \Delta l \simeq 10^{-17} \text{ m}.$

Toute la connaissance de la physique nucléaire nécessaire à la physique atomique se résume à quelques constantes comme la masse et la charge du noyau. De même, la physique des particules utile à la physique nucléaire se réduit à la connaissance de la masse du proton, du neutron, du pion et du couplage  $\pi NN$ . Donc l'étude de la physique à une échelle donnée n'a pas besoin des détails de

la physique à une échelle de distance beaucoup plus petite : seule la valeur de quelques paramètres suffit. La procédure de renormalisation ramène le cas de la théorie des champs à une situation habituelle en physique puisque toutes les complications liées aux divergences ultraviolettes peuvent être éliminées par une re-définition de quelques paramètres tels que masse, couplage, normalisation de la fonction d'onde.

Avant de passer aux détails des calculs on peut faire la remarque suivante concernant le couplage mobile. Si dans le lagrangien, éq. (3.1.1) on avait choisi m = 0, il n'y aurait pas eu d'echelle de masse explicite dans la théorie puisque  $\lambda$  est sans dimension. On aurait pu définir le couplage mobile et on aurait alors trouvé l'éq. (3.1.51) qui dépend explicitement d'une échelle de masse. Ceci peut paraître paradoxal mais c'est une conséquence de la procédure de renormalisation car, pour donner un sens à la théorie perturbative il a fallu d'abord la régulariser par l'introduction d'un cut-off ce qui a implicitement introduit une échelle de masse.

En résumé, la procédure de renormalisation se fait en deux étapes :

- 1. *Régularisation* de la théorie pour donner un sens mathématique aux divergences ultraviolettes (ou autres); la méthode moderne de *régularisation dimensionelle* est présentée dans la section suivante.
- 2. Redéfinition des paramètres du modèle qui est la *renormalisation* proprement dite, pour obtenir une série perturbative à coefficients finis. Il y a beaucoup de redéfinitions possibles, c'est à dire de *schémas de renormalisation*, suivant les quantités finies que l'on absorbe avec les quantiés "infinies". Les expressions obtenues dépendent explicitement du schéma de renormalisation mais les prédictions pour un observable physique ne doivent pas en dépendre. Cette contrainte fondamentale est exprimée par les équations du groupe de renormalisation que nous n'aborderons que de façon très simple dans ces notes (voir le chapitre 12).

## 3.2 Techniques de calcul des diagrammes en boucle.

Dans cette section nous décrivons toutes les techniques mises en œuvre pour évaluer n'importe quel diagramme en boucle en *régularisation dimensionnelle*<sup>6</sup> qui consiste à travailler dans un espace à n dimensions,

$$n = 4 - 2\varepsilon$$

de telle sorte qu'à la limite  $\varepsilon \to 0$  on se retrouve dans l'espace-temps à 4 dimensions qui est le cas qui nous intéresse. La métrique de l'espace à *n*-dimensions est définie par

$$g_{\mu\nu} = (1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-1 \text{ fois}})$$
(3.2.1)

de telle sorte de la norme

$$g^{\mu}_{\mu} = n = 4 - 2\varepsilon, \qquad (3.2.2)$$

un résultat dont il faudra se rappeler lors du calcul des traces de diagrammes en QED et QCD. Il existe plusieurs autres méthodes de régularisation : cut-off, Pauli-Villars, ... Il est important de

<sup>6.</sup> C.G. Bollini, J.J. Giambiagi, Nuovo Cim. **B12** (1972) 20; G. 't Hooft, M.J.G. Veltman, Nucl. Phys. **B44** (1972) 189.

choisir une procédure qui respecte les invariances de la théorie. Le cut-off utilisé précédement brise l'invariance sous les translations, puisqu'il donne une borne sur l'intégration de l'impulsion interne. Pour QED et QCD, théories covariantes de Lorentz, ce choix n'est pas approprié pour les calculs perturbatifs<sup>7</sup> et l'on préfere utiliser la régularisation dimensionnelle qui respecte l'invariance de la théorie sous les translations, ainsi que l'invariance de jauge.

On va être amené à considérer des diagrammes du type :



En n-dimensions l'intégrale correspondante est :

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{F(k)}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((k+p_1)^2 - m_1^2 + i\epsilon)((k+p_1+p_2)^2 - m_2^2 + i\epsilon)...},$$

n étant choisi de façon à ce que l'intégrale soit convergente. Le numérateur F(k) est un facteur qui prend en compte la structure des vertex et des propagateurs de la théorie considérée.

## 3.2.1 Paramétrage de Feynman.

Pour évaluer l'intégrale ci-dessus on introduit le "paramètre" de Feynman, x, qui permet de linéariser le dénominateur dans l'intégrand à l'aide de la formule suivante :

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{(ax+b(1-x))^2}.$$
(3.2.3)

Par dérivation successive par rapport à a ou b on prouve

$$\frac{1}{a^{p}b^{q}} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_{0}^{1} dx \; \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(ax+b(1-x))^{p+q}}, \qquad \text{avec} \; \; \Gamma(p) = (p-1)! \;. \tag{3.2.4}$$

Par récurence et usage de l'éq. (3.2.4) on prouve

$$\frac{1}{abc} = \int_0^1 2y dy \int_0^1 dx \frac{1}{(axy + b(1 - x)y + c(1 - y))^3}.$$
(3.2.5)

<sup>7.</sup> C'est cependant le choix fait pour les "calculs sur réseau" qui permettent d'étudier le régime non-perturbatif de QCD.

Exemples :

$$\int d^{n}k \frac{1}{(k^{2} - m^{2} + i\epsilon)((p_{1} + k)^{2} - m_{1}^{2} + i\epsilon)}$$

$$= \int d^{n}k \int_{0}^{1} dx \frac{1}{[k^{2} + 2x p_{1}.k + xp_{1}^{2} - m_{1}^{2}x - m^{2}(1 - x) + i\epsilon]^{2}}$$

$$= \int d^{n}k \int_{0}^{1} dx \frac{1}{[(k + xp_{1})^{2} + p_{1}^{2}x(1 - x) - m_{1}^{2}x - m^{2}(1 - x) + i\epsilon]^{2}}$$

$$= \int dx \int d^{n}k \frac{1}{[k^{2} - C + i\epsilon]^{2}}$$
(3.2.6)

Dans l'avant-dernière ligne on a ré-écrit le dénominateur de façon à faire disparaître les termes explicitement linéaires en k en introduisant l'expression  $(k + xp_1)^2$  et dans la dernière ligne on a fait le changement de variable  $k+xp_1 \rightarrow k$  qui est justifé si l'intégrale est convergente et, finalement, on a permuté l'ordre d'intégration. Le terme C est indépendant de k, mais dépend seulement de x, des masses et des invariants externes  $p_i^2$ :

$$C = m^{2}(1-x) + m_{1}^{2}x - p_{1}^{2}x(1-x)$$
(3.2.7)

Avec la même technique on peut écrire :

$$\int d^{n}k \, \frac{1}{(k^{2} - m^{2} + i\epsilon)((p_{1} + k)^{2} - m_{1}^{2} + i\epsilon)((p_{1} + p_{2} + k)^{2} - m_{2}^{2} + i\epsilon)}$$

$$= \int_{0}^{1} dx \, \int_{0}^{1} 2y dy \, \int d^{n}k \, \frac{1}{[k^{2} - C' + i\epsilon]^{3}}$$
(3.2.8)

où on a fait le changement de variable  $k + y(p_1 + xp_2) \rightarrow k$  et où C' est la pas très lumineuse expression :

$$C' = (m_1^2(1-x) + m_2^2 x)y + m^2(1-y) - p_2^2 x(1-x)y - (p_1 + xp_2)^2 y(1-y).$$
(3.2.9)

Remarques importantes :

Après translation sur le vecteur k le dénominateur se ramène toujours à la forme  $(k^2 - C + i\epsilon)^n$ , où C dépend des masses et des impulsions externes mais pas de k. On note :

- l'absence de dépendance angulaire au dénominateur facilite grandement l'évaluation de l'intégrale  $\int d^n k$ ;
- la phase est toujours  $+i\epsilon$  quelque soit le nombre de propagateurs que l'on combine. Ceci est crucial pour l'évaluation de l'intégrale.

On considère maintenant les intégrales scalaires de type :

$$I_{r,m} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \quad \frac{k^{2^r}}{[k^2 - C + i\epsilon]^m},$$
(3.2.10)

et on supposera toujours n tel que l'intégrale soit convergente, n < 2(m-r). On supposera de plus C > 0, le passage éventuel à C < 0 se fera sur la forme intégrée.

## 3.2.2 Rotation de Wick.



On peut écrire

$$I_{r,m} = \int \frac{d^{n-1}k}{(2\pi)^n} \int_{\infty}^{\infty} dk_0 \; \frac{k^{2^r}}{[k_0^2 - C - \vec{k}^2 + i\epsilon]^m}$$

Dans le plan  $k^0$  complexe, l'intégrand a des pôles multiples :

$$k_0 = \pm ((\vec{k}^2 + C)^{\frac{1}{2}} - i\epsilon)$$

Au lieu d'intégrer le long de l'axe réel on peut déformer le contour de façon à inclure les quarts de cercle à l'infini (qui ne contribuent pas puisque l'intégrand est suffisament convergent à l' $\infty$ ) et l'axe imaginaire. Comme la déformation du contour ne rencontre pas de singularités, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{\infty} dk_0$  se réduit à une intégrale le long de l'axe imaginaire (c.f. le théorème de Cauchy). On peut donc écrire

$$k^0 = i\omega$$
 avec  $\int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \to i \int_{-\infty}^{\infty} d\omega$ 

et  $k^2 = -\omega^2 - \vec{k}^2 = -\vec{k}^2$  où  $\vec{k} = (\omega, \vec{k})$  est un vecteur euclidien (métrique euclidienne). On a alors

$$I_{r,m} = i(-)^{r-m} \int \frac{d^n \bar{k}}{(2\pi)^n} \, \frac{\bar{k}^{2r}}{[\bar{k}^2 + C - i\epsilon]^m}$$

Dans la suite, pour alléger l'écriture, on omettra souvent le terme  $+i\epsilon$ , ce qui est justifié si C est supposé positif. Dans le cas contraire le facteur  $+i\epsilon$  pourra facilement être rétabli.

## 3.2.3 Intégrales en régularisation dimensionnelle.

On paramétre le vecteur  $\bar{k}$  à l'aide d'une généralisation des angles d'Euler,

$$\bar{k} = k(\cos\theta_1, \sin\theta_1\cos\theta_2, \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \dots, \sin\theta_1\dots\sin\theta_{n-1})$$
(3.2.11)

$$\int d^{n}\bar{k} = \int k^{n-1} \, dk \, d\Omega_{n-1} \tag{3.2.12}$$

où  $k^{n-1}dk$  est l'intégrale sur la longueur du vecteur et où  $d\Omega_{n-1}$  est l'élément d'angle solide dans un espace à n dimensions. On peut faire l'intégrale angulaire aisément puisque l'intégrand ne dépend que de la longueur k.

$$\int d\Omega_{n-1} = \int_0^\pi (\sin\theta_1)^{n-2} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1}$$
(3.2.13)

Usant de

$$\int_0^\pi \sin \theta^m d\theta = \sqrt{\pi} \, \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+2}{2})},\tag{3.2.14}$$

on trouve

$$\int d\Omega_{n-1} = 2 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$
(3.2.15)

L'intégrale  $\int dk$  se fait à l'aide de la formule suivante (voir une bonne table d'intégrales, russe de préférence)

$$\int_0^\infty dx \frac{x^p}{(x^n + a^n)^q} = \pi (-1)^{q-1} \ a^{p+1-nq} \ \frac{\Gamma((p+1)/n)}{n\sin(\pi\frac{p+1}{n})\Gamma(q)\Gamma(\frac{p+1}{n} - q + 1)}$$

Rassemblant tout on trouve finalement

$$I_{r,m} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^{2^r}}{[k^2 - C + i\epsilon]^m} = i \ (C - i\epsilon)^{r-m+\frac{n}{2}} \ \frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \ \frac{\Gamma(r+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \ \frac{\Gamma(m-r-\frac{n}{2})}{\Gamma(m)}$$
(3.2.16)

<u>Remarque</u> : La représentation intégrale de  $I_{r,m}$  n'est pas définie pour  $m - r - \frac{n}{2} < 0$  car l'intégrand ne s'annule pas assez vite quand  $k \to \infty$ . La forme intégrée de  $I_{r,m}$  est définie pour toute valeur de n telles que

$$m - r - \frac{n}{2} \neq 0, -1, -2, \dots$$

puisque la fonction  $\Gamma(z)$  (ici  $\Gamma(m-r-\frac{n}{2})$ ) est définie  $\forall z \neq 0, -1, -2, ...$ 

#### • La fonction $\Gamma(z)$

La fonction  $\Gamma(z)$  de Euler est une généralisation à une variable complexe de la factorielle  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . Elle admet la représentation intégrale :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt \ t^{z-1} \ e^{-t} \ , \ Re \ z > 0.$$
(3.2.17)

On peut facilement démontrer la relation de récurrence :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z},$$
(3.2.18)

qui permet la continuation analytique de  $\Gamma(z)$  définie par l'éq. (3.2.17) dans tout le plan complexe sauf aux valeurs  $z = 0, -1, -2, \ldots$  qui sont des poles simples (voir la figure). On a les relations utiles :

$$\Gamma(z) \ \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{3.2.19}$$



FIGURE 3.4 – Représentation de la fonction  $\Gamma(z)$  pour z réel.

$$\Gamma(1+\varepsilon) = 1 - \gamma\varepsilon + (\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6})\frac{\varepsilon^2}{2!} + \dots, \ \varepsilon \to 0$$
(3.2.20)

où  $\gamma = \text{constante d'Euler.}$ 

## • Intégrales tensorielles

On peut facilement prouver, en exercice, les intégrales suivantes qui seront très utiles dans le calcul des boucles :

$$\int \frac{d^{n}k}{(2\pi)^{n}} \frac{k^{\mu}}{(k^{2} - C + i\epsilon)^{m}} = 0,$$
  
$$\int \frac{d^{n}k}{(2\pi)^{n}} \frac{k^{\mu}k^{\nu}k^{\zeta}}{(k^{2} - C + i\epsilon)^{m}} = 0$$
 (3.2.21)

qui s'évaluent par intégration symétrique - faire  $k \to -k$  dans l'intégrand. En revanche les intégrales avec un nombre pair de  $k_{\mu}$  au numérateur ne sont pas nulles. Par exemple :

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - C + i\epsilon)^m} = \frac{g^{\mu\nu}}{n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^2}{(k^2 - C)^m}$$
(3.2.22)

est proportionnelle à  $g^{\mu\nu}$  qui est le seul tenseur à notre disposition et le coefficient de proportionalité s'obtient facilement en considérant la trace.

On utilise d'habitude la notation :  $n = 4 - 2\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = 2 - \frac{n}{2}$ , qui permet d'écrire l'éq. (3.2.16) sous la forme très utile

$$I_{r,m} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^{2^r}}{[k^2 - C + i\epsilon]^m} = i \frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{C - i\epsilon}\right)^{\varepsilon} C^{2+r-m} \frac{\Gamma(2+r-\varepsilon)}{\Gamma(2-\varepsilon)} \frac{\Gamma(m-r-2+\varepsilon)}{\Gamma(m)}.$$
(3.2.23)

La divergence ultraviolette est contenue dans le facteur  $\Gamma(m - r - 2 + \varepsilon)$  qui a un pôle en  $\varepsilon$  si  $m - r - 2 \leq 0$ . En pratique on développera de telles expressions en  $\varepsilon$  jusqu'aux termes d'ordre 0, par exemple

$$\left(\frac{4\pi}{C-i\epsilon}\right)^{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma - \ln(C-i\epsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon), \qquad (3.2.24)$$

et  $i\epsilon$  dans le terme logarithmique indique la prescription pour définir ce terme quand C est négatif :

$$\ln(C - i\epsilon) = \ln|C| - i \pi \theta(-C).$$
(3.2.25)

## • Applications

On aura souvent besoin de :

$$I_{0,2} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 - C + i\epsilon)^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{C - i\epsilon}\right)^{\varepsilon} \Gamma(\varepsilon) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{C - i\epsilon}\right)^{\varepsilon} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$$
(3.2.26)

Le pôle en  $\varepsilon$  est la manifestation d'une divergence ultraviolette. En effet on remarque que cette intégrale n'est pas définie en 4 dimensions puisque :

$$\int \frac{d^4k}{k^4} \sim \int \frac{d\bar{k}}{\bar{k}}, \quad k \to \infty,$$

diverge logarithmiquement. Il faudra aussi calculer dans la suite :

$$I_{1,2} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \, \frac{k^2}{(k^2 - C)^2} \tag{3.2.27}$$

qui diverge quadratiquement en 4 dimensions. En régularisation dimensionelle on trouve :

$$I_{1,2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{C - i\epsilon}\right)^{\varepsilon} \frac{(2 - \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \Gamma(1 + \varepsilon) C$$
(3.2.28)

qui converge avec un pôle simple à  $\varepsilon = 0$ , le pôle à  $\varepsilon = 1$  étant la marque de la divergence quadratique.

### • Intégrales sur la variable de Feynman

Une fois l'intégrale sur la boucle effectuée et les divergences ultraviolettes extraites il reste à évaluer les intégrales sur le(s) paramètre(s) de Feynman, ce qu'il n'est pas toujours possible de faire de façon simple. Cependant dans le cas d'une théorie sans masse, les expressions se simplifient et le facteur  $C^{-\varepsilon}$  dans l'éq. (3.2.23) conduit à évaluer des expressions de la forme, par exemple, :

$$\int_0^1 dx x^{a-\varepsilon} (1-x)^{b-\varepsilon} = \frac{\Gamma(a+1-\varepsilon) \Gamma(b+1-\varepsilon)}{\Gamma(a+b+2-2\varepsilon)}.$$
(3.2.29)

Il peut arriver que a ou b soient des entiers négatifs ce qui implique que l'intégrale est divergente dans la limite à 4 dimensions. Un tel comportement est associé à la présence de divergences infrarouges ou colinéaires. On en verra un exemple en QED dans la discussion de la self-énergie et de la correction au vertex.

## 3.2.4 Analyse dimensionnelle

Comme il est de coutume en physique des particules on travaille dans le système d'unités où  $\hbar = c = 1$  de telle sorte que énergie E, impulsion p et masse m ont toutes la même dimension exprimée en unité de masse, [E] = [p] = [m] = 1, où le symbole [] dénote la dimension de la quantité entre crochets. Par la relation de Heisenberg on voit qu'une longueur L a une dimension inverse de celle d'une impulsion, d'où [L] = -1.

On rappelle que l'action est une quantité sans dimension qui s'écrit en n dimensions :

$$S = \int d^n x \ \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \lambda).$$

Les paramètres (champs, couplage) voient donc leur dimension, exprimée en unité de masse, affectée lorsque l'on passe de  $\int d^4x \, \mathrm{a} \int d^nx$ . Pour la théorie scalaire éq. (3.1.1) on a, utilisant [S] = 0,  $[d^nx] = -n$ ,

$$0 = -n + 2 + 2[\phi] \Rightarrow [\phi] = \frac{n-2}{2} = 1 - \varepsilon \text{ pour le terme cinétique}$$
  

$$0 = -n + [\lambda] + 4[\phi] \Rightarrow [\lambda] = 4 - n = 2 \varepsilon \text{ pour le terme d'interaction.}$$
(3.2.30)

Dans la théorie  $\lambda \phi^4$  regularisée on écrira alors le couplage  $\lambda \mu^{2\varepsilon}$  avec  $\mu$  un paramètre de masse arbitraire.

Dans le cas de QED on obtient de façon évidente (voir la densité lagrangienne éq. (4.0.6)),

$$\begin{split} [\bar{\psi}\partial_{\mu}\psi] &= n \qquad \Rightarrow \qquad [\psi] = \frac{n-1}{2} \qquad \text{au lieu de } \frac{3}{2} \text{ en un monde à 4 dimensions} \\ [\partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu}] &= n \qquad \Rightarrow \qquad [A_{\mu}] = \frac{n-2}{2} \qquad \text{au lieu de 1 à 4 dimensions} \\ [e\bar{\psi}\mathcal{A}\psi] &= n \qquad \Rightarrow \qquad [e] = \frac{4-n}{2} = \varepsilon \quad \text{au lieu de 0 à 4 dimensions} \\ [m\bar{\psi}\psi] &= n \qquad \Rightarrow \qquad [m] = 1 \end{split}$$
(3.2.31)

Le résultat important est que la charge électrique (couplage) acquiert une dimension  $\varepsilon$ . Dans la théorie régularisée à *n*-dimensions, la charge sera alors écrite

 $e\mu^{\varepsilon}$ .

Il en sera de même pour le couplage fort  $g \to \boxed{g\mu^{\varepsilon}}$  en QCD.

## 3.2.5 Règles de Feynman pour QED

Les propagateurs, dans l'espace des impulsions, sont les transformées de Fourier :

$$P(p) = \int d^n x \ e^{-ip.x} \ < 0 |T\phi(x)\phi(0)|0 > .$$

Donc

$$[P] = -n + 2[\phi] , \quad \phi = A_{\mu}, \psi.$$

Se reportant aux relations (3.2.31) on remarque que la dimension des propagateurs n'est pas affectée quand on travaille en n dimensions et on vérifie que le propagateur du fermion a dimension

-1 et le propagateur du boson a dimension -2.

En n-dimensions les règles de Feynman sont donc :

$$p = i \frac{p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$q = \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{q^2 + i\epsilon}\right)$$

$$= -ie\mu^{\varepsilon} \gamma_{\alpha}$$

Le  $\mu^{\varepsilon}$  va jouer un rôle important dans la procédure de renormalisation : il va tenir, en quelque sorte le rôle du point de soustraction arbitraire  $-q^2$  dans la discussion de la section précédente utilisant la régularisation par un cut-off.

## 3.2.6 Diracologie en *n*-dimensions.

On rappelle que la métrique est donnée par l'éq. (3.2.1) et que la trace de la métrique est alors  $g^{\mu}_{\mu} = 4 - 2\varepsilon$ , ce qui induit des changements notables lors de la manipulation des matrices  $\gamma_{\mu}$ . On garde toujours les relations d'anticommutation

$$\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = 2 g_{\mu\nu} \mathbf{1}, \quad \mu, \nu = 0, 1, ..., n-1$$

mais on a maintenant

$$\gamma_{\mu}\gamma^{\mu} = n\mathbf{1} = (4 - 2\varepsilon)\mathbf{1}$$

au lieu de 4 **1**. Ceci entraîne une modification des règles de réduction du produit de matrices  $\gamma_{\mu}$ . On prouve aisément, utilisant les relations d'anticommutation :

• 
$$\gamma_{\mu}\gamma_{\alpha}\gamma^{\mu} = -2(1-\varepsilon) \gamma_{\alpha}$$
  
•  $\gamma_{\mu}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\gamma^{\mu} = 4g_{\alpha\beta} \mathbf{1} - 2\varepsilon \gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}$   
•  $\gamma_{\mu}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\gamma_{\delta}\gamma^{\mu} = -2\gamma_{\delta}\gamma_{\beta}\gamma_{\alpha} + 2\varepsilon \gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\gamma_{\delta}.$ 
(3.2.32)

Pour l'évaluation des traces  $\gamma ... \gamma$  on choisit Tr  $\mathbf{1} = 4$  et on aura toujours comme, à 4 dimensions,

$$Tr(\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}) = 4g_{\alpha\beta}$$
  

$$Tr(\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\gamma_{\delta}\gamma_{\lambda}) = 4[g_{\alpha\beta} \ g_{\delta\lambda} - g_{\alpha\delta} \ g_{\beta\lambda} + g_{\alpha\lambda} \ g_{\beta\delta}]$$
  

$$Tr(\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}...) = 0 \text{ pour un nombre impair de matrices}$$
(3.2.33)

## **3.3** Renormalisation du modèle $\lambda \phi^4$ à une boucle

Revenant au modèle  $\lambda \phi^4$ , on est en mesure maintenant d'extraire les divergences ultraviolettes des diagrammes en boucle. Concernant la fonction à 4-points (fig. 3.1), l'application de l'éq. (3.2.26) au premier diagramme en boucle du membre de droite donne :

$$\frac{(\lambda_R \mu^{2\varepsilon})^2}{2} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p^2 - m_R^2 + i\epsilon)((p+q)^2 - m_R^2 + i\epsilon)} = i\lambda_R \mu^{2\varepsilon} \left[ \frac{\lambda_R}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx \left( \frac{4\pi\mu^2}{C_t} \right)^{\varepsilon} \right],$$

avec  $C_t = m_R^2 - tx(1-x) - i\epsilon$ ; le terme entre crochets représente la correction de la boucle par rapport au terme de Born. On voit l'importance du paramètre  $\mu$  pour établir la dimension correcte des expressions en *n* dimensions puisque la quantité  $\mu/C_t$  est sans dimension, comme il se doit. Les deux autres diagrammes donnent une contribution similaire où *t* dans le facteur  $C_t$  est remplacé respectivement par  $s = (p_1 + p_2)^2$  et  $u = (p_1 - p_4)^2$ . On a alors pour la contribution des boucles :

$$i\lambda_R \mu^{2\varepsilon} \left\{ \frac{\lambda_R}{2(4\pi)^2} \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx \left[ \left( \frac{4\pi\mu^2}{C_t} \right)^\varepsilon + \left( \frac{4\pi\mu^2}{C_s} \right)^\varepsilon + \left( \frac{4\pi\mu^2}{C_u} \right)^\varepsilon \right] \right\}$$
$$= i\lambda_R \mu^{2\varepsilon} \left\{ \frac{3\lambda_R}{2(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\lambda_R}{2(4\pi)^2} \left[ 3\ln(4\pi) - 3\gamma + \int_0^1 dx \left( \ln\frac{\mu^2}{C_t} + \ln\frac{\mu^2}{C_s} + \ln\frac{\mu^2}{C_u} \right) \right] \right\}$$
(3.3.34)

où dans la dernière ligne on a fait un d'eveloppement de Taylor en  $\varepsilon$  (voir l'éq. (3.2.24)) pour séparer le terme "divergent" (en  $1/\varepsilon$ ) des facteurs "finis". Rassemblant, comme indiqué à la fig. 3.2, tous les termes nécessaires au calcul de la fonction à 4-points on a :

$$-i\lambda_{R}\mu^{2\varepsilon}\left\{1-\frac{3\lambda_{R}}{2(4\pi)^{2}}\frac{1}{\varepsilon}-\frac{\lambda_{R}}{2(4\pi)^{2}}\left[3\ln(4\pi)-3\gamma+\int_{0}^{1}dx(\ln\frac{\mu^{2}}{C_{t}}+\ln\frac{\mu^{2}}{C_{s}}+\ln\frac{\mu^{2}}{C_{u}}\right]+\delta Z_{1}\right\}.$$
(3.3.35)

Le choix du contre-terme :

$$\delta Z_1 = \frac{3\lambda_R}{2(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon},\tag{3.3.36}$$

éliminera la divergences ultra-violette et le résultat sera :

$$-i\lambda_R \left\{ 1 - \frac{\lambda_R}{2(4\pi)^2} \left[ 3\ln(4\pi) - 3\gamma + \int_0^1 dx \left( \ln\frac{\mu^2}{C_t} + \ln\frac{\mu^2}{C_s} + \ln\frac{\mu^2}{C_u} \right] \right\}$$
(3.3.37)

où l'on a fait  $\varepsilon = 0$  puisque l'expression n'a plus de divergence. L'expression sera finie quelque soit la valeurs de s, t, u. On prouvera plus bas que la dépendance en  $\mu$  des termes finis est compensée par celle, implicite, du couplage renormalisé  $\lambda_R = \lambda_R(\mu^2)$ .

Si l'on se tourne maintenant vers l'étude du propagateur à une boucle, éq. (3.1.46), on doit calculer :

$$-i \Pi^{\text{boucle}}(p^{2}, m_{R}^{2}) = -i \lambda_{R} \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^{n}k}{(2\pi)^{n}} \frac{i}{k^{2} - m_{R}^{2} + i\varepsilon} = i m_{R}^{2} \frac{\lambda_{R}}{(4\pi)^{2}} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{1 - \varepsilon} \left(\frac{4\pi\mu^{2}}{m^{2}}\right)^{\varepsilon} \\ = i m_{R}^{2} \frac{\lambda_{R}}{(4\pi)^{2}} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma + 1 + \ln\frac{\mu^{2}}{m^{2}}\right],$$
(3.3.38)

indépendante de l'impulsion externe p. On a donc  $d \Pi^{\text{boucle}}/d p^2 = 0$  et se reportant à l'éq. (3.1.46) on voit qu'il n'y a pas, à cet ordre du calcul, de renormalisation de la fonction d'onde :  $\delta Z_3 = 0$ . Quant au contre-terme de masse le choix :

$$\delta Z_0 = \frac{\lambda_R}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon},\tag{3.3.39}$$

compensera la divergence ultraviolette.

<u>Attention</u> : ne pas confondre  $\varepsilon$  de la *régularisation dimensionnelle* et  $\epsilon$  de la *prescription de Feynman* dans les propagateurs !!!