

Chapitre 4

Renormalisation de QED à une boucle

En jauge covariante le lagrangien QED, exprimé en fonction des quantités nues, est (éq. (2.5.78)) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{B\mu\nu} F_B^{\mu\nu} + \bar{\psi}_B (i \not{\partial} + e_B \not{A}_B) \psi_B - m_B \bar{\psi}_B \psi_B - \frac{\lambda_B}{2} (\partial_\mu A_B^\mu)^2. \quad (4.0.1)$$

On introduit les champs, couplage et masse renormalisés et leur relation avec leur équivalent nu :

$$A_B^\mu = Z_3^{1/2} A^\mu \quad m_B = \frac{Z_0}{Z_2} m \quad \lambda_B = \frac{1}{Z_3} \lambda \quad (4.0.2)$$

$$\psi_B = Z_2^{1/2} \psi \quad e_B = \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}} e \mu^\varepsilon. \quad (4.0.3)$$

On n'inclut pas de facteur de renormalisation spécifique pour le terme de fixation de jauge, car on peut montrer par des arguments généraux qu'il n'est pas renormalisé. Les notations et le choix des fonctions Z_i sont conventionnels. En fonction de ces nouvelles variables la densité lagrangienne s'écrit :

$$\mathcal{L} = -\frac{Z_3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + Z_2 \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + Z_1 e \mu^\varepsilon \bar{\psi} \not{A} \psi - Z_0 m \bar{\psi} \psi - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (4.0.4)$$

que l'on décompose alors en

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \delta\mathcal{L} \quad (4.0.5)$$

avec

$$\mathcal{L}_R = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i \not{\partial} + e \mu^\varepsilon \not{A}) \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (4.0.6)$$

qui a la même forme que la densité éq. (4.0.1) exprimé en fonction des quantités renormalisées, et

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (Z_3 - 1) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (Z_2 - 1) \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + (Z_1 - 1) e \mu^\varepsilon \bar{\psi} \not{A} \psi - (Z_0 - 1) m \bar{\psi} \psi, \quad (4.0.7)$$

qui contient les "contre-termes". Le lagrangien renormalisé \mathcal{L}_R donnent les règles de Feynman usuelles tandis que $\delta\mathcal{L}$ introduit de nouvelles règles associées aux contre-termes. Ceux-ci sont traités

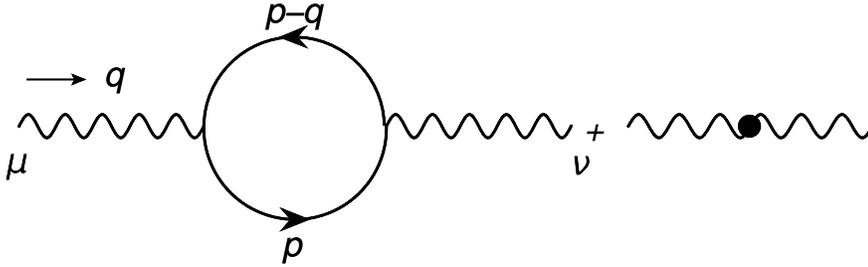
comme des termes d'interaction, c'est-à-dire de façon perturbative, et on obtient les diagrammes suivants :

$$\begin{aligned}
(Z_0 - 1)m\bar{\psi}\psi &\rightarrow \text{---} \times \text{---} = -im(Z_0 - 1) && \text{c.terme de masse} \\
(Z_2 - 1)\bar{\psi}i\partial\psi &\rightarrow \text{---} \bullet \text{---} = i \not{p}(Z_2 - 1) && \text{c.terme de fn. d'onde} \\
(Z_1 - 1)e\mu^\epsilon\bar{\psi}A\psi &\rightarrow \text{---} \bullet \text{---} && \text{c.terme de couplage} \\
-\frac{1}{4}(Z_3 - 1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &\rightarrow \text{---} \bullet \text{---} && \text{c.terme de fonction} \\
&&& \text{d'onde du photon}
\end{aligned} \tag{4.0.8}$$

Dans la suite, nous allons extraire les divergences des diagrammes à une boucle et définir les contre-terme δZ_i dans différents *schémas de renormalisation*. Pour simplifier on ne prendra en compte qu'une espèce de leptons, l'électron par exemple.

4.1 Polarisation du vide : calcul de Z_3

On considère "la polarisation du vide" donnée par les diagrammes à 2 photons externes, à l'ordre d'une boucle. On suppose les photons externes hors-couche $q^2 < 0$:



On dénote $i\Pi_{\mu\nu}(q)$ ces contributions et on a donc,

$$i\Pi_{\mu\nu}(q) = i\Pi_{\mu\nu}^{\text{boucle}}(q) + i(Z_3 - 1)(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}). \tag{4.1.9}$$

L'application des règles de Feynman donne immédiatement :

$$i\Pi_{\mu\nu}^{\text{boucle}}(q^2) = (-1)(-ie\mu^\epsilon)^2 \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{\text{Tr}(\gamma_\mu i(\not{p} + m) \gamma_\nu i(\not{p} - \not{q} + m))}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p - q)^2 - m^2 + i\epsilon)}. \tag{4.1.10}$$

Le facteur (-1) a son origine dans la règle de Feynman pour une boucle fermionique (voir sec. 2.6).

• Invariance de jauge

On prouve d'abord la relation $q^\nu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0$. C'est évident pour le contre-terme. Pour la boucle il suffit d'écrire :

$$iq^\nu \Pi_{\mu\nu}^{\text{boucle}}(q^2) = -(-ie\mu^\epsilon)^2 \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{i}{(\not{p} - m + i\epsilon)} \not{q} \frac{i}{(\not{p} - \not{q} - m + i\epsilon)} \right]. \tag{4.1.11}$$

En ajoutant et retranchant $\not{p} - m$ à \not{q} au numérateur puis en simplifiant avec les dénominateurs on trouve :

$$iq^\nu \Pi_{\mu\nu}^{\text{boucle}}(q^2) = -(-ie\mu^\varepsilon)^2 \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \left(\frac{i}{(\not{p} - \not{q} - m + i\epsilon)} - \frac{i}{(\not{p} - m + i\epsilon)} \right) \right], \quad (4.1.12)$$

qui est nul comme on peut le voir en faisant le changement de variable $p - q \rightarrow p$ dans le premier terme (en n dimensions les intégrales sont convergentes). En fait, la propriété $q^\nu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0$ est une conséquence de la conservation du courant (voir sec. 2.5). On en conclut que $\Pi_{\mu\nu}^{\text{boucle}}$, dont la forme la plus générale est du type $a g^{\mu\nu} + b q^\mu q^\nu$, est nécessairement de la forme :

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{boucle}}(q) = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Pi^{\text{boucle}}(q^2) \quad (4.1.13)$$

où $\Pi^{\text{boucle}}(q^2)$ est une fonction scalaire. Il suffira alors de calculer la trace,

$$\begin{aligned} \Pi_\mu^\mu(q^2)|^{\text{boucle}} &= q^2(1 - n) \Pi^{\text{boucle}}(q^2) \\ &= (2\varepsilon - 3) q^2 \Pi^{\text{boucle}}(q^2). \end{aligned}$$

pour avoir la forme complète de $\Pi_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})(\Pi^{\text{boucle}}(q^2) + \delta Z_3)$.

Remarque

On s'attend, d'après l'éq. (4.1.10) à une divergence quadratique dans la boucle, $\int d^n p/p^2 \rightarrow \int p dp$ en 4-dimensions. Une simple analyse dimensionnelle montre que, à cause du terme $q^\mu q^\nu$ en facteur de Π^{boucle} , la divergence sera du type $q^2 \int d^n p/p^4 \rightarrow \int dp/p$ qui est logarithmique.

Prenant la trace de l'éq. (4.1.10), on a :

$$\Pi_\mu^\mu(q^2)|^{\text{boucle}} = i(e\mu^\varepsilon)^2 \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{\text{Tr}(\gamma_\mu (\not{p} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{q} + m))}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p - q)^2 - m^2 + i\epsilon)}. \quad (4.1.14)$$

• Paramétrage de Feynman

Suivant l'éq. (3.2.3), on écrit immédiatement

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p - q)^2 - m^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{(p'^2 + q^2 x(1 - x) - m^2 + i\epsilon)^2} \quad (4.1.15)$$

où on a fait la translation $p' = p - qx$.

• Calcul de la trace en n -dimensions

$$\text{Tr}(\) = 8 \left((2 - \varepsilon)m^2 - (1 - \varepsilon)(p'^2 - q^2 x(1 - x)) + p'q(2x - 1) \right)$$

On peut négliger le terme linéaire en p' qui s'annule sous $\int d^n p'$ (voir éqs. (3.2.21)).

• Intégration

Rassemblant tout, on a (après avoir fait le changement $p' \rightarrow p$) :

$$\begin{aligned}
 (2\varepsilon - 3)q^2\Pi^{\text{boucle}}(q^2) &= i(e\mu^\varepsilon)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \\
 &\quad \frac{8[-(1-\varepsilon)p^2 + (2-\varepsilon)m^2 + (1-\varepsilon)q^2x(1-x)]}{[p^2 - (m^2 - q^2x(1-x)) + i\epsilon]^2} \\
 &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2} (4\pi)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} 8 \int_0^1 dx \left(\frac{\mu^2}{m^2 - q^2x(1-x) + i\epsilon} \right)^\varepsilon (3-2\varepsilon)q^2x(1-x)
 \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

après application des équations (3.2.26), (3.2.28). Combinant la contribution de la boucle et du contre-terme on a, après simplification par $(3-2\varepsilon)q^2$ (définissant $\alpha = e^2/4\pi$)¹ :

$$\boxed{\Pi(q^2) = \delta Z_3 + 2\frac{\alpha}{\pi} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{\mu^2}{m^2 - q^2x(1-x) + i\epsilon} \right)^\varepsilon} \tag{4.1.17}$$

On peut, à ce point, développer l'intégrand en ε :

$$(X)^\varepsilon = 1 + \varepsilon \ln(X) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

et :

$$\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

pour écrire :

$$\Pi(q^2) = \delta Z_3 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right) \frac{\alpha}{\pi} - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2 - q^2x(1-x) + i\epsilon}{\mu^2} \tag{4.1.18}$$

• Schémas de renormalisation

Le choix du contre-terme pour compenser la divergence en $1/\varepsilon$ définit le schéma de renormalisation :

— schéma MS : "minimal subtraction scheme" ('t Hooft, Veltman)

$$\boxed{\delta Z_3^{MS} = -\frac{\alpha_{MS}}{3\pi\varepsilon}} \Rightarrow \Pi^{MS}(q^2) = \frac{\alpha_{MS}}{3\pi} (\ln 4\pi - \gamma) - 2\frac{\alpha_{MS}}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m_{MS}^2 - q^2x(1-x)}{\mu^2} \tag{4.1.19}$$

— schéma \overline{MS} : "modified minimal subtraction scheme" (Buras, Bardeen, ...)

$$\boxed{\delta Z_3^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha_{\overline{MS}}}{3\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right)} \tag{4.1.20}$$

$$\Rightarrow \Pi^{\overline{MS}}(q^2) = -\frac{2\alpha_{\overline{MS}}}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m_{\overline{MS}}^2 - q^2x(1-x)}{\mu^2} \tag{4.1.21}$$

Il permet de se débarrasser d'inutiles facteurs $\ln 4\pi - \gamma$ dans les quantités renormalisées.

1. En écho à la remarque sur invariance de jauge et degré de divergence de la boucle, on voit comment elle est réalisée en pratique : dans l'éq. (4.1.16) le terme en p^2 au numérateur mène à une divergence quadratique dans l'intégration sur p : cette divergence se manifeste comme un pôle en $(1-\varepsilon)$ qui est en fait annulé par le coefficient $(1-\varepsilon)$.

- schéma ON (= on-shell, schéma physique ou sur couche de masse) : c'est le schéma adopté dans la discussion de $\lambda\phi^4$. On soustrait le contre-terme à $q^2 = 0$ (condition "on shell") en imposant la contrainte

$$\Pi^{ON}(q^2 = 0) = 0, \quad (4.1.22)$$

d'où

$$\boxed{Z_3^{ON} - 1 = -\frac{\alpha_{ON}}{3\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right) + \frac{\alpha_{ON}}{3\pi} \ln \frac{m_{ON}^2}{\mu^2}} \quad (4.1.23)$$

et donc

$$\begin{aligned} \Pi^{ON}(q^2) &= -\frac{2\alpha_{ON}}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m_{ON}^2 - q^2 x(1-x)}{m_{ON}^2} \\ &\simeq -\frac{\alpha_{ON}}{3\pi} \ln \frac{|q^2|}{m_{ON}^2} \quad \text{quand } q^2 \rightarrow \infty, \quad (-q^2 \gg m_{ON}^2) \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Le schéma ON est dit physique car la fonction $\Pi^{ON}(q^2)$ ne dépend pas de la masse arbitraire μ introduite par le schéma de régularisation mais seulement des variables physiques du problème, m^2 et q^2 . Ce genre de conditions est souvent utilisé en QED.

On voit que les différents schémas de renormalisation diffèrent par des termes constants.

• Remarque

Pour alléger l'écriture nous n'avons pas gardé le facteur $i\epsilon$ qui accompagne le terme $\mathcal{C} = m^2 - q^2 x(1-x)$ dans les expressions ci-dessus. Ce terme peut être facilement rétabli si nécessaire en faisant $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$ et il devient important dans le cas où \mathcal{C} est négatif car il fixe la prescription pour définir les logarithmes d'argument négatif (voir éq. (3.2.25)) :

$$\ln(m^2 - q^2 x(1-x) - i\epsilon) = \ln |m^2 - q^2 x(1-x)| - i\pi\theta(q^2 x(1-x) - m^2). \quad (4.1.25)$$

Dans ce cas, puisque $0 \leq x \leq 1$, l'expression $(m^2 - q^2 x(1-x))$ ne devient négative que quand $q^2 > 4m^2$, c'est à dire au dessus du seuil de production d'une paire de fermions. On peut montrer que la partie imaginaire ainsi engendrée a une interprétation physique : ici elle est proportionnelle au taux de désintégration d'un photon virtuel en une paire de fermions².

4.1.1 Conséquence et application

Le propagateur du photon est modifié par l'insertion de boucles et contre-termes. On peut calculer la série complète :

$$\begin{aligned} & \text{~~~~~} + \text{~~~~~} + \text{~~~~~} \\ & \text{prop. du } \gamma \quad \text{correc. à une boucle + c.t.} \\ & + \text{~~~~~} + \text{~~~~~} + \text{~~~~~} + \dots \\ & \text{corrections à 2 boucles + c.t.} \end{aligned}$$

2. Voir la section 1 du chapitre 11 pour une discussion détaillée.

On travaille en jauge de Landau. Pour simplifier la notation on introduit le tenseur

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}(q) = g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \quad (4.1.26)$$

qui satisfait

$$\mathcal{P}_{\mu\mu'}(q) \mathcal{P}^{\mu'\nu}(q) = \mathcal{P}^\nu_\mu(q) \quad (4.1.27)$$

de telle sorte que le propagateur prend la forme $-i \mathcal{P}_{\mu\nu}(q)/(q^2 + i\epsilon)$. Quant à l'insertion de la boucle et du contre-terme elle s'écrit

$$-i q^2 (\delta Z_3 + \Pi^{\text{boucle}}(q^2)) \mathcal{P}_{\mu\nu}(q).$$

Le propagateur devient

$$\begin{aligned} & -\frac{i \mathcal{P}_{\mu\nu}(q)}{q^2 + i\epsilon} + \left(-\frac{i \mathcal{P}_{\mu\mu'}(q)}{q^2 + i\epsilon} \right) \left(-i q^2 (\delta Z_3 + \Pi^{\text{boucle}}(q^2)) \mathcal{P}^{\mu'\nu'}(q) \right) \left(-\frac{i \mathcal{P}_{\nu'\nu}(q)}{q^2 + i\epsilon} \right) + \dots \\ & = -\frac{i \mathcal{P}_{\mu\nu}(q)}{q^2 + i\epsilon} \left(1 - (\delta Z_3 + \Pi^{\text{boucle}}(q^2)) + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

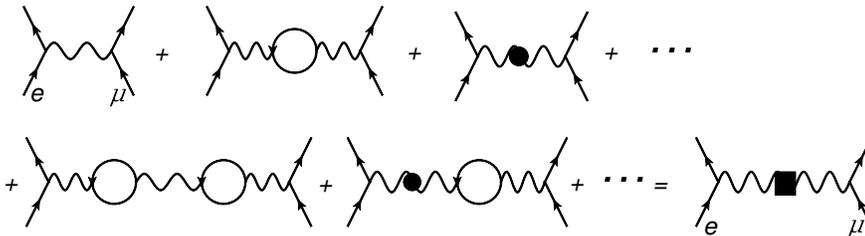
$$= -\frac{i \mathcal{P}_{\mu\nu}(q)}{q^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 + \delta Z_3 + \Pi^{\text{boucle}}(q^2)} \quad (4.1.29)$$

Dans la dernière expression on a "resommé" la série géométrique des insertions de boucles et contre-terme. Le propagateur du photon "complet" garde la même forme que le propagateur à l'ordre le plus bas (i.e. pôle en $1/(q^2 + i\epsilon)$) mais il est "renormalisé" par un facteur multiplicatif. Après renormalisation dans le schéma R, le propagateur du photon s'écrit simplement

$$\boxed{-\frac{i \mathcal{P}_{\mu\nu}(q)}{q^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 + \Pi^R(q^2)}} \quad (4.1.30)$$

Le photon reste donc bien de masse nulle et l'invariance de jauge n'est pas brisée. Ceci est une conséquence de la forme éq. (4.1.13) de la polarisation du vide.

On considère maintenant un processus physique tel que la diffusion $e^-(p_1) + \mu^-(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + \mu^-(p_4)$ par exemple. Prenant en compte les corrections au propagateur du photon les diagrammes à calculer sont donnés ci-dessous :



L'amplitude de diffusion s'obtient immédiatement et on trouve

$$\mathcal{M} = \frac{e_R^2}{1 + \Pi^R(q^2)} \bar{u}_3 \gamma_\mu u_1 \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \mathcal{P}^{\mu\nu} \bar{u}_4 \gamma_\nu u_2 = \frac{e_R^2}{1 + \Pi^R(q^2)} \bar{u}_3 \gamma_\mu u_1 \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}_4 \gamma^\mu u_2. \quad (4.1.31)$$

La section efficace totale est, à haute énergie ($s = (p_1 + p_2)^2$), :

$$\sigma = \frac{1}{2s} \int \frac{dp_3^3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{dp_4^3}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |\mathcal{M}|^2, \quad (4.1.32)$$

d'où on tire la section efficace différentielle pour une diffusion à un angle θ ($q^2 = (p_1 - p_3)^2 = -(s/2)(1 - \cos \theta)$) (négligeant la masse des fermions) :

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \left(\frac{\alpha_R}{1 + \Pi^R(q^2)} \right)^2 \frac{\pi}{s} \frac{4 + (1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^2}, \quad \text{où } \alpha_R = \frac{e_R^2}{4\pi}. \quad (4.1.33)$$

On considère d'abord le schéma de renormalisation ON (physique). Ce schéma est défini par le choix $\Pi^{ON}(q^2 = 0) = 0$ (voir éq. (4.1.22)). Prenant la limite de la section efficace à petit angle, $\theta \rightarrow 0, q^2 \rightarrow 0$, on trouve :

$$(1 - \cos \theta)^2 \frac{d\sigma}{d \cos \theta} \Big|_{\theta \rightarrow 0} = \alpha_{ON}^2 \frac{8\pi}{s}.$$

Le membre de gauche peut être mesuré expérimentalement ce qui fixe la valeur de la constante de couplage renormalisée dans le schéma ON . On trouve (valeur en 2016 du *Particle Data Group*) :

$$\boxed{\alpha_{ON} = \frac{1}{137,035999139(31)}}, \quad (4.1.34)$$

valeur que l'on dénote habituellement par α . Il faut noter qu'en réalité la valeur de α n'est pas déterminée à l'aide de la diffusion $e + \mu$ mais dans des expériences de physique atomique. Si on avait effectué la renormalisation dans le schéma \overline{MS} la relation entre la section efficace $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$ et théorie aurait été :

$$(1 - \cos \theta)^2 \frac{d\sigma}{d \cos \theta} \Big|_{\theta \rightarrow 0} = \left(\frac{\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2)}{1 - (\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2)/3\pi) \ln(m^2/\mu^2)} \right)^2 \frac{8\pi}{s}. \quad (4.1.35)$$

ce qui permet de déterminer $\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2)$ une fois la variable μ choisie. Bien que l'on ne l'ait pas mentionné explicitement, on voit que la charge renormalisée dans un schéma de type \overline{MS} ou MS est fonction de μ puisque le membre de gauche est indépendant de μ . On va voir maintenant comment $\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2)$ varie et on reviendra sur cette question de façon plus formelle en sec. 4.4.

Remarque : On n'a considéré qu'une partie des diagrammes à une boucle ce qui est, comme on le verra plus bas, justifié en QED car les autres diagrammes, bien qu'ils donnent des corrections finies, n'affectent pas la définition de la charge.

• Invariance de la charge effective et variance de la charge renormalisée

Il est facile de prouver, en général, que la charge effective

$$\boxed{\overline{\alpha}_R(q^2, \alpha_R) = \alpha_R / (1 + \Pi^R(q^2)) \equiv \overline{\alpha}(q^2)} \quad (4.1.36)$$

est indépendante du choix du schéma de renormalisation où e_R dénote le paramètre de charge renormalisée et $\alpha_R = e_R^2/4\pi$. On prouvera plus bas (éq. (4.3.95)) l'égalité $Z_1 = Z_2$ de telle sorte que la relation entre charge nue et charge renormalisée est pour QED (cf. l'éq.(4.0.3)) :

$$e_R \mu^\epsilon = (Z_3^R)^{1/2} e_B = \left(1 + \frac{1}{2} \delta Z_3^R\right) e_B \quad \Rightarrow \quad \alpha_R \mu^{2\epsilon} = Z_3^R \alpha_B = (1 + \delta Z_3^R) \alpha_B. \quad (4.1.37)$$

Eliminant α_B , deux schémas R_1 et R_2 ont donc leur charges renormalisées reliés par :

$$\alpha_{R_1} (1 + \delta Z_3^{R_2}) = \alpha_{R_2} (1 + \delta Z_3^{R_1}) \quad (4.1.38)$$

qui décrit la *renormalisation finie* entre les deux schémas. Substituant cette équation dans la charge effective calculée dans le schéma R_2 on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{R_2}}{1 + \Pi^{R_2}(q^2)} &= \frac{\alpha_{R_1} (1 + \delta Z_3^{R_2})}{(1 + \delta Z_3^{R_1})(1 + \Pi^{R_2}(q^2))} \\ &= \frac{\alpha_{R_1}}{1 + \delta Z_3^{R_1} - \delta Z_3^{R_2} + \Pi^{R_2}(q^2)} + \mathcal{O}(\alpha^3). \end{aligned} \quad (4.1.39)$$

Mais Π^R est le reste fini de la combinaison $\delta Z_3^R + \Pi^{\text{boucle}}$, éq. (4.1.17), quand on a choisi le schéma :

$$\Pi^{R_1} = \delta Z_3^{R_1} + \Pi^{\text{boucle}}, \quad \Pi^{R_2} = \delta Z_3^{R_2} + \Pi^{\text{boucle}},$$

d'où :

$$\delta Z_3^{R_1} - \Pi^{R_1} = \delta Z_3^{R_2} - \Pi^{R_2}, \quad (4.1.40)$$

ce qui, injecté dans l'éq. (4.1.39) prouve :

$$\boxed{\frac{\alpha_{R_2}}{1 + \Pi^{R_2}(q^2)} = \frac{\alpha_{R_1}}{1 + \Pi^{R_1}(q^2)} + \mathcal{O}(\alpha^3)} \quad (4.1.41)$$

On a donc bien démontré, dans l'approximation une boucle, que la charge effective est, au sens perturbatif, indépendante du schéma de renormalisation : en effet la différence entre deux prédictions est d'un ordre supérieur à celui auquel on mène le calcul. Revenant à l'éq. (4.1.38) que l'on peut écrire :

$$\alpha_{R_2} = \frac{\alpha_{R_1}}{1 + \delta Z_3^{R_1} - \delta Z_3^{R_2}} + \mathcal{O}(\alpha^3) \quad (4.1.42)$$

et spécifiant $R_2 = \overline{MS}$ et $R_1 = ON$, on trouve à l'aide des équations (4.1.20) et (4.1.23) :

$$\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2) = \frac{\alpha_{ON}}{(1 + \delta Z_3^{ON} - \delta Z_3^{\overline{MS}})} + \mathcal{O}(\alpha^3) = \frac{\alpha_{ON}}{1 - \frac{\alpha_{ON}}{3\pi} \ln \frac{\mu^2}{m^2}} + \mathcal{O}(\alpha^3), \quad (4.1.43)$$

ce qui donne la valeur de la charge renormalisée dans le schéma \overline{MS} en fonction de celle dans le schéma ON . La charge renormalisée $\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2)$ dépend de la variable non physique μ , que l'on peut choisir à sa guise, et cette dépendance garantit que les prédictions pour une quantité physique telle $\overline{\alpha}_{\overline{MS}}(q^2)$, sont indépendantes du choix de μ .

• Application

On considère la réaction $e^+(p_1) + e^-(p_2) \rightarrow \mu^+(p_3) + \mu^-(p_4)$ à très haute énergie, $\sqrt{s} \sim 100$ à 200 GeV, au LEP. Dans l'approximation à une boucle et pour le schéma de renormalisation R , l'élément de matrice est

$$\mathcal{M} = \frac{e_R^2}{1 + \Pi^R(s)} \bar{v}_1 \gamma_\mu u_2 \frac{i}{s} \bar{u}_4 \gamma^\mu v_3, \quad (4.1.44)$$

et la section efficace différentielle devient :

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \left(\frac{\alpha_{ON}}{1 + \Pi^{ON}(s)} \right)^2 \frac{2\pi}{s} (1 + \cos^2\theta), \quad (4.1.45)$$

si on spécifie le schéma ON . D'après l'éq. (4.1.24) on a donc

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \left(\frac{\alpha_{ON}}{1 - \frac{\alpha_{ON}}{3\pi} \ln(s/m^2)} \right)^2 \frac{2\pi}{s} (1 + \cos^2\theta) = \left(\frac{1/137}{1 - \frac{1}{137} \frac{1}{3\pi} \ln(s/m^2)} \right)^2 \frac{2\pi}{s} (1 + \cos^2\theta) \\ &\approx \left(\frac{1}{128} \right)^2 \frac{2\pi}{s} (1 + \cos^2\theta), \quad \text{for } \sqrt{s} \sim 100 \text{ GeV à } 200 \text{ GeV.} \end{aligned} \quad (4.1.46)$$

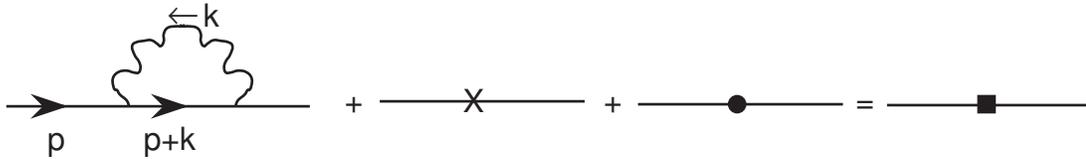
La prise en compte des termes d'ordre supérieur de la théorie des perturbations implique donc que la charge électrique effective dépend des conditions cinématiques de l'observation.

• Conclusion

Il convient, dans le schéma de renormalisation R , de distinguer le paramètre de charge renormalisée α_R de la charge effective dénotée $\bar{\alpha}(q^2)$ qui apparaît dans le calcul des observables. La valeur du paramètre de charge dépend du schéma de renormalisation alors que la charge effective définie comme ci-dessus est un invariant. La constante de structure fine α est une constante fondamentale de la physique mais sa valeur numérique $\alpha = 1/137,035999139$ est définie dans le cadre d'un schéma de renormalisation spécifique ON , en un point particulier de l'espace des impulsions ($q^2 = 0$).

4.2 Self-énergie du fermion : calcul de Z_0 et Z_2

On se tourne maintenant vers le diagramme à deux fermions externes supposant, pour le moment, le fermion légèrement hors couche ($p^2 \neq m^2$). Il y a trois diagrammes à prendre en compte :



$$\begin{aligned} -i\Sigma^{\text{boucle}}(p) &+ \underbrace{(-im)(Z_0 - 1)}_{\text{contre-terme de masse}} + \underbrace{i\not{p}(Z_2 - 1)}_{\text{contre-terme de fn. d'onde}} = -i\Sigma(p) \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

On considère le propagateur du fermion après sommation des corrections en boucles + contre-terms (cf. discussion ci-dessus du propagateur du photon)

$$\begin{aligned} S_F(p) &= \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \blacksquare \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \blacksquare \text{---} \blacksquare \text{---} \blacksquare \text{---} \\ &= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} (-i\Sigma(p)) \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \left(-i\Sigma \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \right) \left(-i\Sigma \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \right) + \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \frac{1}{1 - \Sigma(p) / (\not{p} - m + i\epsilon)},$$

après sommation de la série géométrique. Rappelant que si a, b sont des matrices, alors $\frac{1}{a} \frac{1}{b} = \frac{1}{ba}$, et on a donc pour le propagateur complet

$$S_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p) + i\epsilon}. \quad (4.2.48)$$

• Calcul de la boucle

On calcule $-i\Sigma^{\text{boucle}}(p)$ en jauge covariante,

$$-i\Sigma^{\text{boucle}}(p) = (-ie\mu^\epsilon)^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \gamma_\mu \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{-i(g^{\mu\nu} - (1-\xi)k^\mu k^\nu / k^2)}{k^2 + i\epsilon} \quad (4.2.49)$$

où $\xi = 1$ pour la jauge de Feynman et $\xi = 0$ pour celle de Landau. L'application des méthodes habituelles (paramétrage de Feynman, contraction des indices μ dans $\gamma_\mu \dots \gamma_\mu$ par les éqs. (3.2.32)), translation $k + px = l$, donne

$$\begin{aligned} -i\Sigma^{\text{boucle}}(p) = & -(e\mu^\epsilon)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \left[\frac{(2(2-\epsilon) - (1-\xi))m - (2(1-\epsilon)(1-x) - (1-\xi)(1+x)) \not{p}}{[l^2 - \mathcal{C}]^2} \right. \\ & \left. - 4 \frac{(1-\xi)(1-x)}{[l^2 - \mathcal{C}]^3} \left(\frac{l^2}{2(2-\epsilon)} + x^2 p^2 \right) \not{p} \right], \end{aligned} \quad (4.2.50)$$

avec $\mathcal{C} = m^2 x - p^2 x(1-x) - i\epsilon$. Etant donné la complexité des expressions nous allons traiter deux cas particuliers : cas massif en jauge de Feynman d'une part, et cas de masse nulle en jauge covariante d'autre part.

• Renormalisation dans le cas massif en jauge de Feynman

Faisant le choix $\xi = 1$ dans l'éq. (4.2.50), on a seulement besoin de l'intégrale $I_{0,2}$ (éq.(3.2.26)) pour trouver la contribution de la boucle :

$$\Sigma^{\text{boucle}}(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon} (4\pi)^\epsilon \int_0^1 dx \left[\frac{m^2 x - p^2 x(1-x)}{\mu^2} \right]^{-\epsilon} ((2-\epsilon)m - (1-\epsilon)(1-x) \not{p}). \quad (4.2.51)$$

Pour étudier le comportement du propagateur (éq. (4.2.48)) près du pôle, qui doit correspondre à la masse physique du fermion, on développe la fonction $\Sigma^{\text{boucle}}(p)$ au voisinage de $p^2 = m^2$ ou de façon équivalente $\not{p} = m$ où m est le paramètre de masse renormalisée. On définit donc les coefficients scalaires :

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \Sigma^{\text{boucle}}(\not{p} = m) \\ \Sigma_1 &= \left. \frac{d\Sigma^{\text{boucle}}}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} \Leftrightarrow \gamma_\alpha \Sigma_1 = \left. \frac{d\Sigma^{\text{boucle}}}{dp^\alpha} \right|_{\not{p}=m}, \end{aligned} \quad (4.2.52)$$

de sorte que la boucle de self-énergie peut s'écrire :

$$\Sigma^{\text{boucle}}(p) = \Sigma_0 + (\not{p} - m) \Sigma_1 + \dots$$

Le propagateur du fermion dans l'approximation à une boucle devient alors :

$$\begin{aligned} S_F(p) &= \frac{1}{(\not{p} - m)(1 + \delta Z_2 - \Sigma_1) - m(\delta Z_0 - \delta Z_2) - \Sigma_0 + i\epsilon} \\ &= \frac{1}{(\not{p} - m - \Sigma_0 - m(\delta Z_0 - \delta Z_2) + i\epsilon)(1 + \delta Z_2 - \Sigma_1)} + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{aligned} \quad (4.2.53)$$

A la suite de manipulations identiques à celles qui ont mené à l'éq. (3.1.46) on trouve :

$$\boxed{S_F(p) = \frac{1 - \delta Z_2 + \Sigma_1}{\not{p} - m - \Sigma_0 - m(\delta Z_0 - \delta Z_2) + i\epsilon} + \mathcal{O}(\alpha^2).} \quad (4.2.54)$$

Les deux formes de l'équation sont identiques au sens perturbatif puisque les δZ_i et les Σ_i sont tous d'ordre α . L'expression pour Σ_0 est facile à calculer et on trouve :

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= m \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \left(\frac{3}{2} + 2\varepsilon \right) \\ &= m \frac{3\alpha}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) + \ln \frac{\mu^2}{m^2} + \frac{4}{3} \right). \end{aligned} \quad (4.2.55)$$

Quant au calcul de Σ_1 , utilisant la relation $dF(p^2)/d\not{p} = 2 \not{p} dF(p^2)/dp^2$, on obtient après quelques manipulations :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi\mu^2)^\varepsilon \int_0^1 dx \left[-(1 - \varepsilon)(1 - x)(m^2 x^2)^{-\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + 2m^2 \varepsilon x(1 - x)(m^2 x^2)^{-\varepsilon - 1} (1 + (1 - \varepsilon)x) \right] \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \int_0^1 dx (1 - x)x^{-2\varepsilon} \left[-(1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon) + 2\varepsilon x^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.56)$$

L'intégrale se fait trivialement à l'aide de l'éq. (3.2.29) et l'on voit que le deuxième terme présente un pôle en ε (associé au comportement "divergent" quand $x \rightarrow 0$) qui sera indexé par le symbole "ir" pour le distinguer du pôle en ε d'origine ultraviolette qui vient de l'intégrale sur l'impulsion de la boucle. On note que ce terme divergent dans l'infrarouge est proportionnel au facteur ε qui "tue" la divergence ultraviolette de sorte qu'il n'y a pas de double pôle $1/\varepsilon \varepsilon_{\text{ir}}$, comme il se doit puisque ces deux divergences ont leur origine dans différentes régions de l'espace des impulsions. On trouve finalement :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{\alpha}{2\pi} \Gamma(1 + \varepsilon) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \left[-\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} - 2 \right] \\ &= -\frac{\alpha}{4\pi} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \right) + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} - \gamma + \ln(4\pi) \right) + 3 \ln \frac{\mu^2}{m^2} + 4 \right]. \end{aligned} \quad (4.2.57)$$

Les conditions de renormalisation seront choisies telles qu'il ne reste plus de divergences ultraviolettes (mais il peut rester des divergences infrarouges) :

$$\delta Z_2 - \Sigma_1 \sim \text{fini dans l'ultraviolet} \quad (4.2.58)$$

$$m(\delta Z_0 - \delta Z_2) + \Sigma_0 \sim \text{fini dans l'ultraviolet} \quad (4.2.59)$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour définir différents schémas de renormalisation.

• **Renormalisation ON**

Pour le schéma ON , sur "couche de masse", on choisit les contre-termes de telle sorte que le propagateur garde, après les corrections à une boucle la même forme qu'à l'ordre le plus bas. Les contre-termes sont donc (voir éq. (4.2.54)) :

$$\boxed{\delta Z_2^{ON} = \Sigma_1} \quad (4.2.60)$$

$$\boxed{m_{ON} (\delta Z_0^{ON} - \delta Z_2^{ON}) = -\Sigma_0}, \quad (4.2.61)$$

et ils sont obtenus facilement à partir des éqs. (4.2.55, 4.2.57), c'est à dire que toute la dépendance en les quantités non physiques (divergences ultraviolette et infrarouge, dépendance en μ) est absorbée dans les contre-termes. Le propagateur de la théorie renormalisée est donc simplement :

$$\boxed{S_F^{ON} = \frac{i}{\not{p} - m_{ON} + i\epsilon}} \quad (4.2.62)$$

Comme le pôle du propagateur est par définition la masse physique de la particule, on a $\boxed{m_{ON} = m_{\text{phys}}}$.

• **Renormalisation \overline{MS}**

Dans ce cas, seules les divergences ultraviolettes et leur cortège de $\ln(4\pi) - \gamma$ sont absorbées sans les contre-termes ;

$$\boxed{\delta Z_0^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right)}$$

$$\boxed{\delta Z_2^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right)}, \quad (4.2.63)$$

et le propagateur de l'électron prend une forme compliquée :

$$S_F^{\overline{MS}} = i \frac{1 + \Sigma_1^{\overline{MS}}}{\not{p} - m_{\overline{MS}} - \Sigma_0^{\overline{MS}} + i\epsilon}, \quad (4.2.64)$$

avec

$$\Sigma_0^{\overline{MS}} = m \frac{3\alpha}{4\pi} \left(\ln \frac{\mu^2}{m^2} + \frac{4}{3} \right) \quad (4.2.65)$$

et

$$\Sigma_1^{\overline{MS}} = \frac{\alpha}{2\pi} \left[- \left(\frac{1}{\epsilon_{\text{ir}}} - \gamma + \ln(4\pi) \right) - \frac{3}{2} \ln \frac{\mu^2}{m_{\overline{MS}}^2} - 2 \right]. \quad (4.2.66)$$

• **Invariance du pôle du propagateur, relation entre $m_{\overline{MS}}$ et m_e**

Il est facile de montrer que le pôle du propagateur dans un schéma arbitraire est à la masse physique m_{phys} . On considère dans le dénominateur de l'éq. (4.2.54) l'expression $\Sigma_0 + m(\delta Z_0 - \delta Z_2)$. Après avoir choisi les contre-termes δZ_0 et δZ_2 dans le schéma R_1 on aura :

$$\Sigma_0^{R_1} = \Sigma_0 + m_{R_1} (\delta Z_0^{R_1} - \delta Z_2^{R_1}), \quad (4.2.67)$$

où $\Sigma_0^{R_1}$ est la partie finie de Σ_0 restant après soustraction des termes divergents. De même pour un schéma R_2 on aura :

$$\Sigma_0^{R_2} = \Sigma_0 + m_{R_2}(\delta Z_0^{R_2} - \delta Z_2^{R_2}), \quad (4.2.68)$$

d'où on tire, éliminant Σ_0 :

$$m_{R_1}(\delta Z_0^{R_1} - \delta Z_2^{R_1}) - \Sigma_0^{R_1} = m_{R_2}(\delta Z_0^{R_2} - \delta Z_2^{R_2}) - \Sigma_0^{R_2}. \quad (4.2.69)$$

Mais la relation,

$$m_B = \frac{Z_0^{R_1}}{Z_2^{R_1}} m_{R_1} = \frac{Z_0^{R_2}}{Z_2^{R_2}} m_{R_2}, \quad (4.2.70)$$

s'écrit perturbativement

$$m_{R_1} (1 + \delta Z_0^{R_1} - \delta Z_2^{R_1}) = m_{R_2} (1 + \delta Z_0^{R_2} - \delta Z_2^{R_2}). \quad (4.2.71)$$

Combinant avec les équations précédentes il en ressort :

$$\boxed{m_{R_1} + \Sigma_0^{R_1} = m_{R_2} + \Sigma_0^{R_2}}, \quad (4.2.72)$$

ce qui démontre l'invariance du pôle du propagateur. Choissant $R_1 = \overline{MS}$ et $R_2 = ON$ on a bien

$$m_{ON} = m_{\text{phys}} = m_{\overline{MS}} + \Sigma_0^{\overline{MS}}. \quad (4.2.73)$$

Le propagateur du fermion, dans le schéma \overline{MS} s'écrit donc :

$$\boxed{S_F^{\overline{MS}} = i \frac{1 + \Sigma_1^{\overline{MS}}}{\not{p} - m_{\text{phys}} + i\epsilon}} \quad (4.2.74)$$

La relation entre les paramètres de masse dans les différents schémas est d'après les éqs. (4.2.73) et (4.2.65),

$$m_{\text{phys}} = m_{\overline{MS}} \left(1 + \frac{3\alpha}{4\pi} \left(\ln \frac{\mu^2}{m^2} + \frac{4}{3} \right) \right). \quad (4.2.75)$$

Inversant cette équation on obtient :

$$\boxed{m_{\overline{MS}}(\mu) = m_{\text{phys}} \left(1 - \frac{3\alpha}{4\pi} \left(\ln \frac{\mu^2}{m_{\text{phys}}^2} + \frac{4}{3} \right) \right)} \quad (4.2.76)$$

qui donne la dépendance explicite du paramètre de masse du schéma \overline{MS} en la variable arbitraire μ de façon que la physique soit indépendante du choix de cette variable. Dans un schéma tel que \overline{MS} , il faut bien distinguer, le paramètre de masse renormalisée de la masse physique, observable.

• Renormalisation de la fonction d'onde de l'électron

Le facteur $1 + \Sigma_1^{\overline{MS}}$ qui apparaît au numérateur de l'éq. (4.2.74) renormalise la fonction d'onde de l'électron (le spineur de Dirac). En effet, on peut ré-écrire cette équation :

$$S_F^{\overline{MS}} = i \frac{(\not{p} + m_{\text{phys}})(1 + \Sigma_1^{\overline{MS}})}{p^2 - m_{\text{phys}}^2 + i\epsilon}, \quad (4.2.77)$$

mais comme on l'a montré en sec. 2.3, le numérateur n'est autre que la somme sur les états de polarisation α de la combinaison $u_\alpha(p)|_{\overline{MS}} \bar{u}_\alpha(p)|_{\overline{MS}}$, ce qui conduit à normaliser la fonction d'onde du fermion dans le schéma \overline{MS} par la condition :

$$\sum_{\alpha=1,2} u_\alpha(p)|_{\overline{MS}} \bar{u}_\alpha(p)|_{\overline{MS}} = (\not{p} + m_{\text{phys}})(1 + \Sigma_1^{\overline{MS}}), \quad (4.2.78)$$

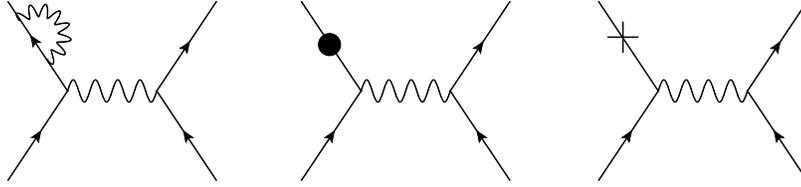
d'où,

$$\boxed{\begin{aligned} u_\alpha(p)|_{\overline{MS}} &= \left(1 + \frac{1}{2}\Sigma_1^{\overline{MS}}\right) u_\alpha(p) \\ v_\alpha(p)|_{\overline{MS}} &= \left(1 + \frac{1}{2}\Sigma_1^{\overline{MS}}\right) v_\alpha(p), \end{aligned}} \quad (4.2.79)$$

où les $u_\alpha(p), v_\alpha(p)$ sont les spineurs ordinaires, définis en sec. 2.2, normalisés par $u_\alpha(p)\bar{u}_\alpha(p) = (\not{p} + m_{\text{phys}})$ et $v_\alpha(p)\bar{v}_\alpha(p) = (\not{p} - m_{\text{phys}})$. Pour $\Sigma_1^{\overline{MS}}$ il est justifié d'utiliser sa valeur au pôle du propagateur m_{phys} au lieu de $m_{\overline{MS}}$ et on a donc :

$$\Sigma_1^{\overline{MS}} = \frac{\alpha}{2\pi} \left[-\left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} - \gamma + \ln(4\pi)\right) - \frac{3}{2} \ln \frac{\mu^2}{m_{\text{phys}}^2} - 2 \right]. \quad (4.2.80)$$

En résumé, lors du calcul à une boucle avec électrons externes il faudra inclure les corrections sur les pattes fermioniques externes comme indiqué sur le graphe ci-dessous :



Pour prendre en compte ce type de contributions il suffira de remplacer dans les diagrammes à l'ordre le plus bas le spineur du fermion par le spineur renormalisé défini par les éqs. (4.2.79). Le propagateur et le spineur ainsi définis ne peuvent être des quantités physique car ils dépendent de quantités non-physiques : pôle en $1/\varepsilon_{\text{ir}}$, dépendance en μ . On peut montrer, lors du calcul d'une quantité physique telle que section efficace ou taux de décroissance, que ces termes se compensent et le résultat est indépendant de la procédure de renormalisation.

En règle générale, pour un schéma de renormalisation arbitraire, on note que l'éq. (4.2.54) implique que les spineurs renormalisés soient modifiés de la façon suivante :

$$\boxed{u_\alpha(p) \rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}(-\delta Z_2 + \Sigma_1)\right) u_\alpha(p)}$$

$$\boxed{v_\alpha(p) \rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}(-\delta Z_2 + \Sigma_1)\right) v_\alpha(p),} \quad (4.2.81)$$

mais, dans le schéma de renormalisation ON, les spineurs ne sont, par définition, pas modifiés.

• **Divergence infrarouge**

Nous avons vu que Σ_1 contient un pôle en ε dont l'origine est le comportement de l'intégrand de l'éq. (4.2.56) quand $x \rightarrow 0$. On peut relier le comportement singulier de l'intégrale sur x au comportement divergent de l'intégrale sur l'impulsion de la boucle de self-énergie quand le fermion externe est sur couche de masse $p^2 = m^2$. En effet si on calcule la fonction Σ_1 par l'éq. (4.2.52), avant intégration sur l'impulsion dans la boucle, elle contient un terme de la forme :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\sim \int d^n k \int_0^1 dx \frac{d}{d \not{p}} \left[\frac{1}{((p+k)^2 - m^2)x + k^2(1-x)^2} \right]_{p^2=m^2} \\ &\sim \int d^n k \int_0^1 dx \left[\frac{m x}{(2 p \cdot k x + k^2)^3} + \dots \right] \\ &\sim \int d^n k \left[m \left(\frac{1}{2 p \cdot k} \right)^2 \frac{1}{k^2} + \text{termes } \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.2.82)$$

où le terme explicité vient de la borne inférieure de l'intégrale $x = 0$, qui fait apparaître le facteur $1/k^2$. Il est clair que l'intégrale sur k divergerait logarithmiquement pour $k \rightarrow 0$ dans un espace à 4 dimensions mais conduit à un pôle en ε en n dimensions. Si le photon était massif, la masse du photon jouerait le rôle de régulateur de cette divergence logarithmique dans un espace à 4 dimensions. De même, si l'on était resté hors couche de masse le régulateur aurait été $(p^2 - m^2)$, et on aurait obtenu un $\ln(p^2 - m^2)$.

• **Renormalisation dans le cas $m = 0$ en jauge covariante**

Revenant à l'éq. (4.2.50), on a dans ce cas $\mathcal{C} = -p^2 x(1-x) - i\varepsilon$ et les intégrales sur l'impulsion l de type $I_{0,2}$, $I_{0,3}$, $I_{1,3}$, de l'éq. (3.2.23), se font très facilement. On obtient :

$$\begin{aligned} -i\Sigma^{\text{boucle}}(p) &= -i \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^\varepsilon 2 \not{p} \int_0^1 dx x^{-\varepsilon} (1-x)^{-\varepsilon} [\Gamma(\varepsilon)(-(1-\varepsilon)(1-x) + (1-\xi)x) \\ &\quad - \Gamma(1+\varepsilon)(1-\xi)x], \end{aligned} \quad (4.2.83)$$

qui exhibe une divergence ultraviolette dans le premier terme. Cette intégrale est facile à évaluer grâce à l'éq. (3.2.29) pour donner :

$$\begin{aligned} -i\Sigma^{\text{boucle}}(p) &= i \xi \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (1+\varepsilon) \not{p} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= -i \Sigma^{(1)}(p) \not{p} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.2.84)$$

où on a négligé un facteur $\Gamma(1-\varepsilon)^2/\Gamma(1-2\varepsilon)$ issu de l'intégrale sur x qui ne contribue pas puisqu'il est d'ordre $1+\varepsilon^2$. A une boucle, le propagateur du fermion de masse nulle s'écrira donc en général :

$$\begin{aligned} S_F(p) &= \frac{i}{\not{p} + i\varepsilon} \left(1 + i(\delta Z_2 - \Sigma^{(1)}(p)) \not{p} \frac{i}{\not{p} + i\varepsilon} \right) \\ &= \frac{i}{\not{p} + i\varepsilon} (1 - \delta Z_2 + \Sigma^{(1)}(p)) \end{aligned} \quad (4.2.85)$$

Comme il n'y a pas de modification du dénominateur il n'y a pas de renormalisation de masse. Si on travaille en jauge de Landau $\xi = 0$, alors il n'est pas nécessaire d'introduire un contre-terme puisque $\Sigma^{\text{boucle}}(p) = 0$ et le propagateur du fermion à une boucle est $i/(\not{p} + i\varepsilon)$ comme à l'ordre le plus bas. Dans le cas général, renormaliser sur couche de masse et obtenir la forme des spineurs est plus subtil car cela implique de prendre la limite $p^2 = 0$, ce qui est assez délicat. La procédure consiste à d'abord effectuer la renormalisation off-shell ($p^2 \neq 0$) et, ensuite à prendre la limite $p^2 \rightarrow 0$ de la théorie renormalisée. On écrira donc :

$$\begin{aligned} -\delta Z_2 + \Sigma^{(1)}(p) &= -\delta Z_2 - \xi \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon \\ &\quad - \xi \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon \left(\left(\frac{\mu^2}{-p^2} \right)^\varepsilon - 1 \right) - \xi \frac{e^2}{(4\pi)^2}, \end{aligned} \quad (4.2.86)$$

où on a explicité la divergence ultraviolette :

$$\Sigma_{\text{UV}} = -\xi \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon. \quad (4.2.87)$$

Le contre-terme dans le schéma \overline{MS} sera choisi pour compenser ce terme :

$$\delta Z_2^{\overline{MS}} = -\xi \frac{e^2}{(4\pi)^2} (4\pi)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = -\xi \frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma \right). \quad (4.2.88)$$

Une fois l'expression renormalisée on peut faire, dans l'éq. (4.2.86), la continuation $\varepsilon < 0$ ce qui permet alors de prendre la limite $p^2 \rightarrow 0$ de telle sorte que $(\mu^2/(-p^2))^\varepsilon \rightarrow 0$. Le propagateur d'un fermion de masse nulle dans le schéma \overline{MS} est donc :

$$S_F^{\overline{MS}} = \frac{i}{\not{p} + i\varepsilon} \left[1 + \xi \frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} + \ln(4\pi) - \gamma - 1 \right) \right]. \quad (4.2.89)$$

La notation ε_{ir} au lieu de ε rappelle l'origine de cette divergence qui n'est pas associée au comportement ultraviolet du diagramme en boucle mais plutôt à son comportement lorsque la virtualité du fermion tend vers 0.

• Remarque

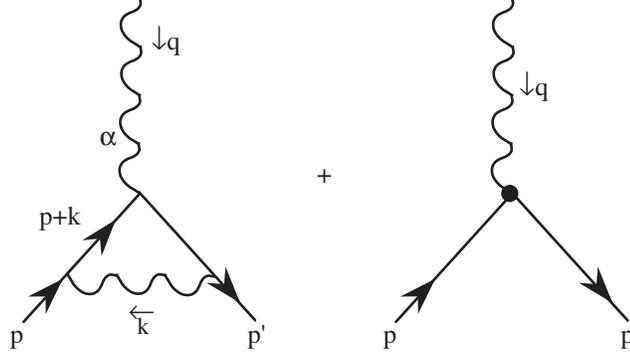
Nous allons conclure cette discussion par une remarque qui sera utile pour la section suivante. Si on considère les équations (4.1.18), (4.2.55) et (4.2.57) on remarque que la structure de la divergence ultraviolette, dans le schéma \overline{MS} , est la suivante :

$$\text{boucle} \left(\begin{array}{c} \text{dépendante} \\ \text{des impulsions} \\ \text{externes} \end{array} \right) = K (4\pi)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} + \text{termes finis} \left(\begin{array}{c} \text{dépendants} \\ \text{des impulsions} \\ \text{externes} \end{array} \right) \quad (4.2.90)$$

et K est une constante qui ne dépend pas explicitement des impulsions externes. Cette structure est naturelle puisque la divergence étant liée au comportement de l'intégrand quand l'impulsion de la boucle tend vers l'infini, cette divergence est insensible à la valeur des impulsions externes finies. Si on s'intéresse uniquement au calcul des contre-terme (détermination de K) on peut faire un choix des impulsions qui simplifient le calcul. On va utiliser cette remarque pour simplifier le calcul de Z_1 .

4.3 Correction au vertex : calcul de Z_1

Les diagrammes à considérer sont :



L'application des règles de Feynman pour le diagramme en boucle donne en jauge de Feynman :

$$-ie\mu^\varepsilon \Lambda_\alpha^{\text{boucle}}(p; p') = (-ie\mu^\varepsilon)^3 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \gamma_\rho i \frac{(\not{p}' + \not{k} + m)}{(p' + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\alpha i \frac{(\not{p} + \not{k} + m)}{(p + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\sigma \frac{-ig^{\rho\sigma}}{k^2 + i\epsilon} \quad (4.3.91)$$

• Extraction de la singularité ultraviolette

D'après le commentaire autour de l'éq. (4.2.90), il suffira, pour déterminer la partie divergente, de choisir une cinématique particulière simple, par exemple

$$q = 0 \Rightarrow p = p'$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha(p; p) &= \Lambda_\alpha^{\text{boucle}}(p; p) + (Z_1 - 1)\gamma_\alpha \quad (4.3.92) \\ &= (Z_1 - 1)\gamma_\alpha - i(e\mu^\varepsilon)^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \gamma_\rho \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\rho \frac{1}{k^2 + i\epsilon}. \end{aligned}$$

On prouve facilement la relation :

$$\frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} = -\frac{d}{dp^\alpha} \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon}. \quad (4.3.93)$$

En effet :

- $\frac{d}{dp^\alpha}(\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon) = \gamma_\alpha$,
- Si $a(p)$ est une matrice (ici $a(p) = \not{p} + \not{k} - m + i\epsilon$) alors

$$\frac{d}{dp^\alpha} (a(p) a^{-1}(p)) = 0$$

donc la dérivée de l'inverse est :

$$\frac{d}{dp^\alpha} a^{-1}(p) = -a^{-1}(p) \left(\frac{da(p)}{dp^\alpha} \right) a^{-1}(p)$$

d'où l'équation (4.3.93).

Le vertex devient alors :

$$\Lambda_\alpha(p; p) = (Z_1 - 1)\gamma_\alpha + i(e\mu^\varepsilon)^2 \frac{d}{dp^\alpha} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \gamma_\rho \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\rho \frac{1}{k^2 + i\epsilon}$$

On reconnaît immédiatement dans l'intégrale l'expression de $\Sigma^{\text{boucle}}(p)$ (voir équation (4.2.49)) en jauge de Feynman ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha(p; p) &= (Z_1 - 1)\gamma_\alpha - \frac{d}{dp^\alpha} \Sigma^{\text{boucle}}(p) \\ &= (Z_1 - 1)\gamma_\alpha - \Sigma_1 \gamma_\alpha, \end{aligned} \quad (4.3.94)$$

d'après l'éq. (4.2.52). On voit que la condition sur Z_1 qui rend cette quantité finie est identique à la condition (4.2.58) sur Z_2 , d'où

$$Z_1 = Z_2 + \text{termes finis.}$$

Il est usuel de choisir alors simplement $Z_1 = Z_2$ et on trouve, dans le schéma \overline{MS} par exemple,

$$\boxed{Z_1|_{\overline{MS}} = Z_2|_{\overline{MS}} = 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right)} \quad (4.3.95)$$

Remarque

La relation $Z_1 = Z_2$ est une relation générale, valable à tous les ordres de la théorie des perturbations. Elle exprime le fait que la théorie construite à partir des quantités renormalisées est invariante de jauge. En effet, cette condition garantit que sous une transformation de jauge des champs renormalisés la variation des termes suivants dans le lagrangien (4.0.4) se compensent :

$$Z_2 \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - Z_1 e \bar{\psi} \not{A} \psi. \quad (4.3.96)$$

C'est un cas particulier des identités de Ward-Takahashi. Une démonstration de cette identité est proposée plus bas.

4.3.1 Correction au vertex : calcul complet

Pour simplifier le calcul, nous supposons les pattes fermioniques externes sur couche de masse, $p^2 = p'^2 = m^2$, et nous supposons implicitement que le diagramme est inséré entre les spineurs $\bar{u}(p')$ à gauche et $u(p)$ à droite, de telle sorte que par anticommutation des impulsions \not{p} vers la droite et \not{p}' vers la gauche on puisse utiliser les relations $\not{p}u(p) = mu(p)$ et $\bar{u}(p')\not{p}' = m\bar{u}(p')$ dans la réduction du numérateur de l'éq. (4.3.91). Le photon est supposé de genre espace $q^2 < 0$.

• Paramétrage de Feynman

On revient à l'équation (4.3.91). La linéarisation du dénominateur fait intervenir deux paramètres de Feynman (utiliser l'équation (3.2.5)) : on regroupe d'abord les deux premiers facteurs du dénominateur avec la variable x puis on introduit y . On trouve

$$\frac{1}{(p' + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, 2y \frac{1}{[l^2 - \mathcal{C} + i\epsilon]^3} \quad (4.3.97)$$

avec $l = k + y(xp' + (1-x)p)$ et $\mathcal{C} = y^2(m^2 - q^2x(1-x))$. Le calcul est faisable mais devient compliqué à cause des deux paramètres de Feynman et de la complexité du numérateur (produit de cinq matrices γ).

• **Calcul du numérateur**

Réduire le numérateur est un exercice pénible, la seule simplification étant que l'on peut ignorer les termes linéaires en l qui s'annulent dans l'intégration sur l'impulsion l de la boucle. Il restera un terme quadratique qui contient la divergence ultraviolette et des termes indépendants de l dont certains seront divergents dans l'infrarouge. On peut alors montrer que :

$$\Lambda_\alpha^{\text{boucle}}(p; p') = -i (e\mu^\varepsilon)^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy 2y \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \left[\frac{\overbrace{2 \frac{(1-\varepsilon)^2}{2-\varepsilon} l^2 \gamma_\alpha}^{\text{UV}} + \overbrace{2(2m^2 - q^2)\gamma_\alpha}^{\text{ir}} + \overbrace{y f_\alpha(p, p', x, y)}^{\text{rég}}}{(l^2 - y^2(m^2 - q^2x(1-x)) + i\varepsilon)^3} \right] \quad (4.3.98)$$

où f_α a la forme peu transparente :

$$f_\alpha(p, p', x, y) = [2(y(m^2 - q^2x(1-x)) - (4m^2 - q^2))\gamma_\alpha + 4m(p_\alpha(x - y(1-x)) + p'_\alpha(1-x - yx))]. \quad (4.3.99)$$

On voit facilement que le premier terme de l'expression entre crochets dans l'éq. (4.3.98) contient toute les divergences ultraviolettes. On le calcule facilement à l'aide de l'éq. (3.2.23) et le résultat, après développement en ε est :

$$\Lambda_\alpha^{\text{UV}}(p; p') = \frac{\alpha}{4\pi} \gamma_\alpha \left(\left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma \right] - 1 - I_0 \right) \quad (4.3.100)$$

avec

$$I_0 = \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 - q^2x(1-x)}{\mu^2} \quad (4.3.101)$$

Quant au deuxième terme, proportionnel à $2(2m^2 - q^2)\gamma_\alpha$, il a un pôle en ε du fait de l'intégrale en y qui signale une divergence infrarouge :

$$\Lambda_\alpha^{\text{ir}}(p; p') = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \Gamma(1+\varepsilon) (4\pi)^\varepsilon \gamma_\alpha \int_0^1 dx \frac{2(2m^2 - q^2)\mu^{2\varepsilon}}{(m^2 - q^2x(1-x))^{1+\varepsilon}} \int_0^1 dy y^{-1-2\varepsilon}. \quad (4.3.102)$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha^{\text{ir}}(p; p') &= \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon (2m^2 - q^2)\gamma_\alpha \int_0^1 dx \frac{1 - \varepsilon \ln((m^2 - q^2x(1-x))/\mu^2)}{m^2 - q^2x(1-x)} \\ &= \frac{\alpha}{4\pi} (2m^2 - q^2)\gamma_\alpha \left(\left[\frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} + \ln(4\pi) - \gamma \right] I_1 - I_2 \right) \end{aligned} \quad (4.3.103)$$

avec :

$$I_1 = \int_0^1 dx \frac{1}{m^2 - q^2x(1-x)} \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 dx \frac{\ln((m^2 - q^2x(1-x))/\mu^2)}{m^2 - q^2x(1-x)} \quad (4.3.104)$$

Le pôle en ε , dénoté $1/\varepsilon_{\text{ir}}$ pour rappeler son origine. En effet, dans l'éq. (4.3.98), si l'on fait d'abord l'intégrale sur y il apparaît la combinaison :

$$\int d^n l \left(\frac{1}{(l^2)^2} - \frac{1}{(l^2 - m^2 + q^2 x(1-x))^2} \right), \quad (4.3.105)$$

le premier terme venant de borne inférieure $y = 0$ de l'intégrale. Cette expression exhibe bien une singularité infrarouge associée au comportement divergent quand $l \rightarrow 0$ du premier terme mais elle est régulière dans l'ultraviolet du fait de la compensation entre les deux termes. On note que le terme en f_α de l'éq. (4.3.98), que l'on va évaluer maintenant, est protégé d'une telle divergence par le facteur y supplémentaire. Etant régulier on pourra prendre $\varepsilon = 0$ et on trouve :

$$\Lambda_\alpha^{\text{régulier}}(p; p') = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\gamma_\alpha (1 - 2(3m^2 - q^2)I_1) - im\sigma_{\alpha\beta}q^\beta I_1 \right), \quad (4.3.106)$$

où $\sigma_{\alpha\beta} = i [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]/2$. Cette dernière expression requiert quelques explications : l'intégrale sur y du dernier terme fait apparaître des combinaisons du type $p_\alpha(1-x) + p'_\alpha x$ et $p'_\alpha(1-x) + p_\alpha x$, le reste de l'intégrand étant symétrique dans l'échange $x \leftrightarrow 1-x$ on peut facilement montrer que ce terme sera finalement proportionnel à $p'_\alpha + p_\alpha$. On peut alors utiliser l'identité de Gordon qui permet d'écrire

$$\boxed{p'_\alpha + p_\alpha = 2m\gamma_\alpha - i\sigma_{\alpha\beta}q^\beta} \quad (4.3.107)$$

lorsque l'expression est insérée entre les spineurs $\bar{u}(p')$ à gauche et $u(p)$ à droite. Le diagramme de vertex à une boucle, γ compris le contre-terme peut alors s'écrire en introduisant les facteurs de forme électrique $F_1(q^2)$ et magnétique $F_2(q^2)$:

$$\boxed{\Lambda_\alpha(p; p') = \gamma_\alpha F_1(q^2) + \frac{i}{2m}\sigma_{\alpha\beta}q^\beta F_2(q^2)}, \quad (4.3.108)$$

avec

$$\begin{aligned} F_1(q^2) &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma \right] + (2m^2 - q^2) \left(\left[\frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} + \ln(4\pi) - \gamma \right] I_1 - I_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2(3m^2 - q^2) I_1 - 2 - I_0 + (Z_1 - 1) \right\}, \\ F_2(q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi} m^2 I_1. \end{aligned} \quad (4.3.109)$$

Les divergences sont contenues dans le terme proportionnel à γ_α qui a la même forme que le vertex à l'ordre le plus bas tandis qu'un nouveau terme fini, $F_2(q^2)$, avec une forme différente apparaît.

• Renormalisation dans le schéma \overline{MS}

Le choix

$$\boxed{Z_1^{\overline{MS}} = 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma \right]} \quad (4.3.110)$$

compense le terme divergent dans l'ultraviolet et l'on retrouve bien par calcul direct $Z_1 = Z_2$ (éq.(4.2.63) comme annoncé. Le vertex à une boucle a alors une forme compliquée et contient des

termes divergents dans l'infra-rouge mais qui n'est qu'un facteur multiplicatif du vertex de Born. On trouve :

$$F_1^{\overline{MS}}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ (2m^2 - q^2) \left(\left[\frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} + \ln(4\pi) - \gamma \right] I_1 - I_2 \right) + 2 (3m^2 - q^2) I_1 - 2 - I_0 \right\}. \quad (4.3.111)$$

• Renormalisation dans le schéma ON

Ce schéma est défini par la condition

$$F_1(q^2) = 1 \text{ à } q^2 = 0. \quad (4.3.112)$$

Dans ces conditions on a

$$I_0 = \ln \frac{m^2}{\mu^2}, \quad I_1 = \frac{1}{m^2}, \quad I_2 = \frac{1}{m^2} \ln \frac{m^2}{\mu^2} \quad (4.3.113)$$

et on trouve

$$Z_1^{ON} = 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \left(\left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma \right] + 2 \left[\frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} + \ln(4\pi) - \gamma \right] + 4 + 3 \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right), \quad (4.3.114)$$

ce qui coincide avec les équations (4.2.60) et (4.2.57). Le vertex à une boucle ainsi défini ne contient alors plus de divergences infrarouges à $q^2 = 0$ mais elles subsistent pour tout autre valeur de q^2 .

4.3.2 Moment magnétique anomal de l'électron, du muon et application

Contrairement au facteurs de forme électrique $F_1(q^2)$ qui dépend du schéma de renormalisation, le terme $F_2(q^2)$ en est indépendant³ et sa valeur à $q^2 = 0$ ($I_1(q^2 = 0) = 1/m^2$) dénotée a_e ou $(g-2)/2$ est le moment magnétique anomal de l'électron :

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} \sim 1,16110^{-3} \quad (4.3.115)$$

dans l'approximation à une boucle. Le moment anomal de l'électron constitue actuellement un des tests les plus précis de QED. Sa valeur expérimentale (en 2016 d'après le *Particle Data Group*) est :

$$a_e|_{\text{exp}} = (1\,159\,652\,180\,91 \pm 0,000\,000\,26) 10^{-6}. \quad (4.3.116)$$

La précision actuelle est comparable à celle qui consiste à mesurer la distance de la terre à la lune avec une erreur de l'épaisseur d'un cheveu. Le moment anomal a été calculé jusqu'à l'ordre α^5 par Kinoshita *et al.*⁴ et ce calcul peut être utilisé pour obtenir la valeur de la constante de structure fine à partir de l'éq. (4.3.116). On trouve alors pour α (dans le schéma ON) :

$$\alpha^{-1} = 137,035\,999\,1727 \pm 0,000\,000\,0341. \quad (4.3.117)$$

3. En fait l'expression de a_e dépend du schéma de renormalisation car la valeur de α en dépend mais la valeur de a_e ne dépend pas du schéma, ou plutôt sa dépendance est d'un ordre supérieur à celui calculé.

4. T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio, *Physical Review* **D85**, 03300 (2012)

Ce résultat représente à ce jour la détermination la plus précise de α . D'autre part, on peut mesurer la constante de structure fine dans les expériences de physique atomique (mesure du rapport h/m_{Rb} du rapport de la constante de Planck sur la masse de l'atome de ^{87}Rb ⁵) et on trouve

$$\alpha^{-1} = 137,035\,999\,049 \pm 0,000\,000\,090. \quad (4.3.118)$$

Avec cette valeur on prédit le moment anomal de l'électron :

$$a_e|_{\text{th}} = (1\,159,652\,181\,78 \pm 0,000\,000\,77) 10^{-6}, \quad (4.3.119)$$

résultat compatible avec la mesure expérimentale ci-dessus.

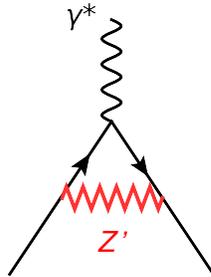
Le moment magnétique du muon est mesuré à une précision moindre que celle de a_e mais malgré cela il joue un rôle important dans les contraintes sur la "nouvelle physique" (c'est à dire la physique au-delà du Modèle Standard). Sa valeur expérimentale est (*Particle Data Group*) :

$$a_\mu = (1\,165,920\,09 \pm 0,000\,06) 10^{-6}. \quad (4.3.120)$$

Il existe actuellement un désaccord entre théorie et expérience qui est estimé à⁶

$$a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{th}} = \delta a_\mu = (0,002\,87 \pm 0,000\,80) 10^{-6}, \quad (4.3.121)$$

soit un écart de 3,5 déviations standards⁷. Cette différence peut être due soit à une mauvaise estimation des erreurs expérimentales et/ou théoriques (soit à une erreur dans la mesure et/ou dans le calcul dans le cadre du Modèle Standard!), soit à une contribution de "nouvelle physique" à a_μ . En effet on peut estimer, de façon qualitative, que la contribution à une boucle de diagrammes impliquant une nouvelle particule Z' de masse M' , avec un couplage g' aux muons ($\alpha' = g'^2/4\pi$)



induit, en général, une correction de l'ordre de $(\alpha'/2\pi)m_\mu^2/M'^2$ en plus des contributions du Modèle Standard. Pour que ce nouveau terme "explique" la différence entre expérience et prédiction du Modèle Standard il faudrait que

$$\frac{\alpha'}{2\pi} \frac{m_\mu^2}{M'^2} \sim \delta a_\mu \sim 3 \cdot 10^{-9}, \quad (4.3.122)$$

5. R. Bouchendira, P. Clade, S. Guellalti-Khelifa, F. Nez and F. Biraben, Phys. Rev. Lett. **106**, 080801 (2011).

6. F. Jegerlehner et A. Nyffeler, Phys. Rep. **377**, 1, 2009 [arXiv :0902.3360].

7. Dans une revue récente, P. Masjuan [arXiv :1411.6397], cite la valeur théorique $a_\mu = (1\,165,918\,52 \pm 0,000\,059) 10^{-6}$ ce qui réduit un peu le désaccord entre théorie et expérience, $\delta a_\mu = 0,001\,57$, soit un écart d'environ $2,8 \sigma$.

qui impose que la masse de la nouvelle particule soit

$$M'^2 \sim \alpha' 10^6 \text{ GeV}^2, \quad (4.3.123)$$

c'est à dire $M' \sim 100 \text{ GeV}$ pour $\alpha' \sim 10^{-2}$ ou $M' \sim 300 \text{ GeV}$ pour $\alpha' \sim 10^{-1}$ ou $M' \sim 1 \text{ TeV}$ pour $\alpha' \sim 1$. Ce type de limite est presque du même ordre de grandeur que celui espéré des expériences au LHC ! La contribution d'une telle particule Z' au moment magnétique anomal de l'électron serait de l'ordre de $(\alpha'/2\pi)(m_e^2/M'^2)$, trop petite pour être mise en évidence.

En résumé, nous avons calculé dans les sections précédentes les contre-terms Z_i qui rendent l'électrodynamique quantique finie dans l'approximation à une boucle de la théorie des perturbations. C'est à dire que tout processus physique calculé dans cette approximation n'aura pas de divergences ultraviolettes et le résultat du calcul devra être fini. On rappelle ici la valeur des contre-terms dans le schéma \overline{MS} , en jauge de Feynman, éqs. (4.1.21), (4.2.63), (4.3.110) sont respectivement :

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \rightarrow Z_3 = 1 + c_3 \frac{\Gamma(1+\varepsilon)(4\pi)^\varepsilon}{\varepsilon} \alpha, \quad c_3 = -\frac{1}{3\pi} \\ \text{---} \text{---} \rightarrow Z_2 = 1 + c_2 \frac{\Gamma(1+\varepsilon)(4\pi)^\varepsilon}{\varepsilon} \alpha, \quad c_2 = -\frac{1}{4\pi} \\ \text{---} \text{---} \rightarrow Z_0 = 1 + c_0 \frac{\Gamma(1+\varepsilon)(4\pi)^\varepsilon}{\varepsilon} \alpha, \quad c_0 = -\frac{1}{\pi} \\ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \rightarrow Z_1 = 1 + c_1 \frac{\Gamma(1+\varepsilon)(4\pi)^\varepsilon}{\varepsilon} \alpha, \quad c_1 = c_2 \end{array} \right\} \text{ en } \overline{MS}$$

L'expression des contre-terms dépend du choix du schéma de renormalisation et du choix de la jauge et il en est de même pour les expressions résiduelles des fonctions de Green. Cependant le calcul d'un processus physique doit en être indépendant. Pour cela il est nécessaire de calculer tous les diagrammes à un ordre donné et pas seulement les termes virtuels comme on l'a fait dans ce chapitre. Un exemple d'un tel calcul est discuté dans le chapitre suivant où l'on montrera comment les divergences infrarouges des fonctions à 2 et 3 points se compensent avec les diagrammes dits réels. On pourra alors obtenir les corrections finies d'ordre α par rapport au terme de Born.

4.4 Renormalisation : la fonction $\beta(\alpha)$ et le couplage mobile

Nous avons montré de façon intuitive que dans les schémas MS ou \overline{MS} la constante de couplage renormalisée dépendait du choix du paramètre arbitraire μ : c'est ce qu'on appelle le couplage mobile. On avait également exprimé $\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2)$ en fonction de α_{ON} . Le raisonnement fait alors n'est pas transposable à QCD et on va introduire maintenant de façon plus formelle ce couplage mobile. Nous travaillons dans un schéma (type MS ou \overline{MS}) où les contre-terms n'ont pas de dépendance explicite en une masse. Le point de départ est la relation éq. (4.0.3) entre couplage nu, couplage renormalisé et les fonctions Z_i

$$\alpha_B = \alpha \mu^{2\varepsilon} \frac{Z_1^2}{Z_2^2 Z_3} \quad (4.4.124)$$

avec, dans le schéma \overline{MS} , des Z_i de la forme

$$\boxed{Z_i = 1 + c_i \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)(4\pi)^\varepsilon}{\varepsilon} \alpha} \quad (4.4.125)$$

Dans le cadre de l'approximation à une boucle (approximation d'ordre α) on peut toujours ré-écrire

$$\frac{Z_1^2}{Z_2^2 Z_3} \equiv Z_\alpha = 1 + \frac{c_\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon} \alpha \quad (4.4.126)$$

où la constante $c_\alpha(\varepsilon)$ est connue dès que les Z_i le sont, puisque

$$c_\alpha(\varepsilon) = (2c_1 - 2c_2 - c_3) \Gamma(1 + \varepsilon)(4\pi)^\varepsilon. \quad (4.4.127)$$

Dans nos notations simplifiées on a donc

$$\alpha_B = \alpha \mu^{2\varepsilon} Z_\alpha(\alpha, \varepsilon)$$

où $\alpha(\mu)$, le couplage renormalisé, est une fonction de μ . On introduit de façon traditionnelle la fonction $\beta(\alpha)$, dite fonction β de Gell-Mann/Low,

$$\boxed{\beta(\alpha) \equiv \mu^2 \frac{d\alpha}{d\mu^2} = \frac{d\alpha}{d \ln \mu^2} .}$$

Le couplage α_B est évidemment indépendant de μ^2 : en effet, la masse μ et le couplage renormalisé ne sont introduits que lorsqu'on sépare la densité lagrangienne, exprimée en fonction des quantités nues, en une partie "renormalisée" et les contre-termes (voir l'éq. (4.0.5)) :

$$\mathcal{L}(\psi_B, \alpha_B, A_B^\mu) = \mathcal{L}(\psi, \alpha, A^\mu; \mu^2) + \delta \mathcal{L}(\psi, \alpha, A^\mu; \delta Z_i; \mu^2).$$

On a donc

$$\mu^2 \frac{d\alpha_B}{d\mu^2} \equiv 0 \quad (4.4.128)$$

ce qui implique

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} (\alpha \mu^{2\varepsilon} Z_\alpha(\alpha, \varepsilon)) \equiv \beta(\alpha) \mu^{2\varepsilon} Z_\alpha(\alpha, \varepsilon) + \varepsilon \alpha \mu^{2\varepsilon} Z_\alpha(\alpha, \varepsilon) + \alpha \mu^{2\varepsilon} \mu^2 \frac{dZ_\alpha(\alpha, \varepsilon)}{d\mu^2} = 0.$$

On simplifie par $\mu^{2\varepsilon}$ et écrivant, puisque Z_α ne dépend que de façon implicite de μ^2 ,

$$\mu^2 \frac{dZ_\alpha(\alpha, \varepsilon)}{d\mu^2} = \frac{dZ_\alpha(\alpha, \varepsilon)}{d\alpha} \frac{\mu^2 d\alpha}{d\mu^2} = \beta_\alpha \frac{dZ_\alpha(\alpha, \varepsilon)}{d\alpha},$$

on trouve

$$\beta(\alpha) Z_\alpha(\alpha, \varepsilon) + \varepsilon \alpha Z_\alpha(\alpha, \varepsilon) + \alpha \beta(\alpha) \frac{dZ_\alpha(\alpha, \varepsilon)}{d\alpha} = 0, \quad (4.4.129)$$

soit

$$\beta(\alpha) = - \frac{\varepsilon \alpha}{1 + \alpha \frac{dZ_\alpha(\alpha, \varepsilon)}{d\alpha} / Z_\alpha(\alpha, \varepsilon)}. \quad (4.4.130)$$

Puisque l'on fait un calcul perturbatif en le couplage α , ne gardant que les deux premiers ordres, il est justifié de faire l'approximation $Z_\alpha(\alpha, \varepsilon) \simeq 1$ dans l'équation ci-dessus et d'écrire de plus

$$\beta(\alpha) \simeq -\varepsilon\alpha \left(1 - \alpha \frac{dZ_\alpha(\alpha, \varepsilon)}{d\alpha} \right). \quad (4.4.131)$$

Substituant alors (voir l'éq. (4.4.126))

$$\frac{dZ_\alpha(\alpha, \varepsilon)}{d\alpha} = \frac{c_\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

il vient :

$$\boxed{\beta(\alpha) \simeq -\varepsilon\alpha + c_\alpha(\varepsilon) \alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)}. \quad (4.4.132)$$

On peut alors prendre la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ partout puisqu'il n'y a plus de divergence dans l'expression et on voit que

$$\boxed{\beta(\alpha) \equiv \frac{d\alpha}{d \ln \mu^2} = c_\alpha(0) \alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)}. \quad (4.4.133)$$

$c_\alpha(0)$, dénoté maintenant simplement par c_α , est connu via l'équation (4.4.127). Ceci est la forme générique de la fonction de Gell-Mann/Low au premier ordre non trivial de la théorie des perturbations. Le signe de la constante $c_\alpha(0)$ détermine la variation du couplage renormalisé en fonction de l'échelle d'énergie : croissant avec μ si c_α est positif, décroissant dans le cas contraire. Si $c_\alpha(0) = 0$ la théorie est dite invariante conforme. Intégrant l'éq. différentielle (4.4.133),

$$-\frac{1}{\alpha(\mu^2)} + \frac{1}{\alpha(\mu_0^2)} = c_\alpha(0) \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2} + \mathcal{O}(\ln(\alpha(\mu^2)/\alpha(\mu_0^2)))$$

on obtient le couplage mobile sous sa forme usuelle,

$$\boxed{\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha(\mu_0^2)}{1 - c_\alpha(0) \alpha(\mu_0^2) \ln(\mu^2/\mu_0^2)} + \mathcal{O}(\alpha^3 \ln(\mu^2/\mu_0^2))} \quad (4.4.134)$$

où on a utilisé l'approximation $\ln(\alpha(\mu^2)/\alpha(\mu_0^2)) \sim \alpha(\mu_0^2) \ln(\mu^2/\mu_0^2) \sim \alpha(\mu^2) \ln(\mu^2/\mu_0^2)$. Pour QED, on aura donc,

$$\boxed{\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha(\mu_0^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu_0^2)}{3\pi} \ln(\mu^2/\mu_0^2)} + \mathcal{O}(\alpha^3 \ln(\mu^2/\mu_0^2))} \quad (4.4.135)$$

qui montre que le couplage α croît avec μ . On peut comparer cette équation qui relie, dans le schéma \overline{MS} , le couplage renormalisé évalué à deux échelles différentes, à l'équation (4.1.43) exprimant le couplage \overline{MS} en fonction du couplage ON : la dépendance en μ^2 est évidemment identique.

• Remarque

La dérivation du couplage mobile que l'on vient de donner s'applique uniquement au schéma de renormalisation de type MS ou \overline{MS} ou plus généralement aux schémas dont les contre-termes n'ont pas de dépendance explicite en une échelle de masse. Par exemple, dans le schéma ON , le contre-terme Z_3 contient un terme fini en $\ln(m^2/\mu^2)$ qui introduirait un facteur supplémentaire

dans la fonction $\beta(\alpha)$.

• **Remarque**

La relation du type $\frac{d\epsilon_B}{d\mu} \equiv 0$ (éq. (4.0.3)) n'est qu'un cas particulier des équations du groupe de renormalisation qui jouent un rôle fondamental en théorie des champs. Elles expriment que les prédictions physiques (observables) ne doivent pas dépendre du choix de la procédure de régularisation ni du schéma de renormalisation. En particulier, l'éq. (4.4.134) exprime comment le couplage $\alpha(\mu)$ doit varier en fonction de μ pour que, quand le "point de renormalisation" μ varie, les prédictions physiques soient indépendantes de μ .

• **Remarque : invariance de la charge effective**

Suite à la discussion sur la correction de polarisation du vide, on avait introduit de façon très pédestre une charge effective (4.1.36) et on avait montré qu'elle était indépendante du schéma de renormalisation, du moins au premier ordre correctif de la théorie des perturbations. Un argument plus général, valable à tous les ordres, est le suivant. On considère la combinaison $\alpha_B G_B^{\mu\nu}(q)$ où charge et propagateur sont les quantités nues. Introduisant maintenant les quantités renormalisées dans un schéma quelconque R on a (dans la limite $\epsilon = 0$),

$$\begin{aligned} \alpha_R G_R^{\mu\nu}(q) &= \frac{Z_3 Z_2^2}{Z_1^2} \alpha_B \frac{1}{Z_3} G_B^{\mu\nu}(q) \\ &= \alpha_B G_B^{\mu\nu}(q), \end{aligned} \quad (4.4.136)$$

en vertu des éqs. (4.0.3), (3.1.36) et de l'identité de Ward $Z_1 = Z_2$. Le produit de la charge au carré et du propagateur est donc indépendant du schéma de renormalisation. Paramétrant le propagateur comme dans la discussion après l'équation (4.1.27), on voit que, après sommation à tous les ordres de l'insertion de polarisation du vide, l'expression prend la forme :

$$\alpha_R G_R^{\mu\nu}(q) = \frac{\alpha_R}{1 + \Pi_R(q^2)} (-i) \frac{\mathcal{P}_{\mu\nu}(q)}{(q^2 + i\epsilon)}. \quad (4.4.137)$$

Comme la forme tensorielle et le pôle en q^2 ne sont pas modifiés par les corrections (invariance de jauge oblige) on a bien prouvé l'invariance de la charge effective en QED définie par :

$$\bar{\alpha}_R(q^2, \alpha_R) = \frac{\alpha_R}{1 + \Pi^R(q^2)}. \quad (4.4.138)$$

4.5 Identités de Ward-Takahashi

Ce sont des relations entre fonctions de Green avec un nombre différent de pattes externes, par exemple, fonction à trois points (vertex) et fonction à deux points (self-énergie). On considère un diagramme quelconque avec m lignes d'électrons et n photons externes, la structure interne étant arbitraire (voir fig. 4.1). On se concentrera sur la ligne électronique d'impulsion p entrante et $q = p_n$ sortante et on suppose les pattes externes hors couche c'est à dire couplées à un propagateur et non à une fonction d'onde. L'objet en question sera donc de la forme :

$$\mathcal{F}_0(p, \dots; q, \dots) = \frac{1}{\not{p} - m_e} \cdots \frac{1}{\not{q} - m_e} \quad (4.5.139)$$

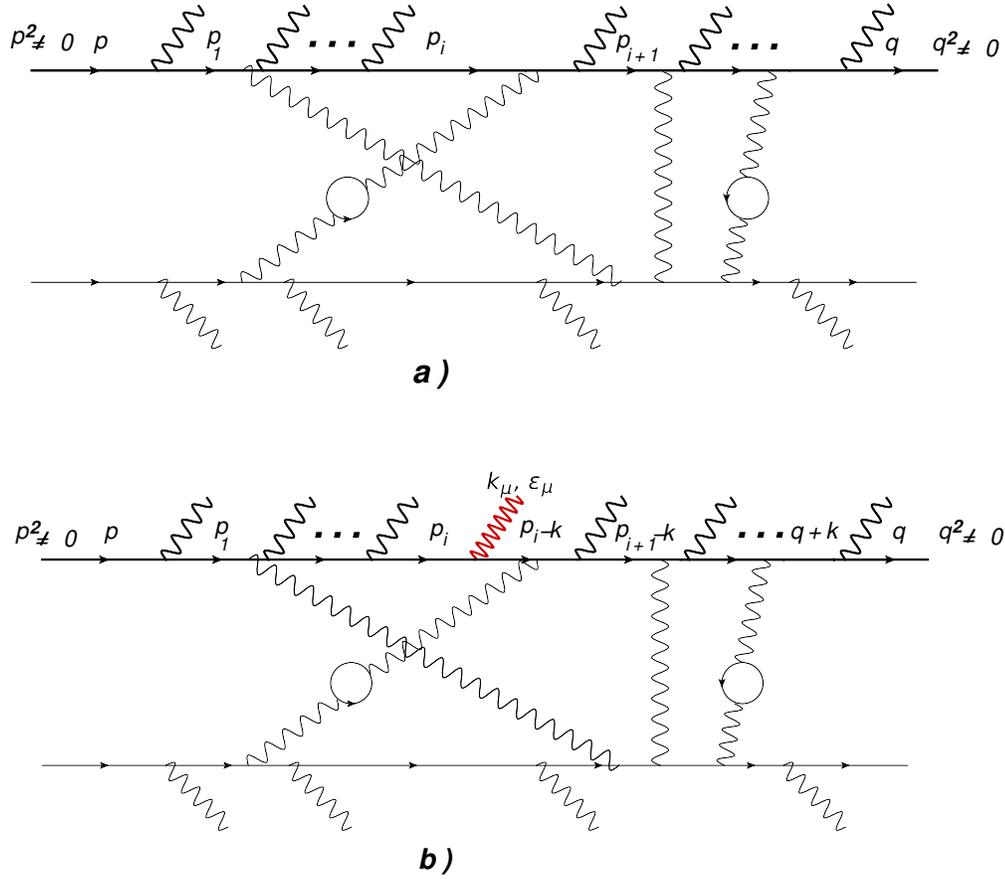


FIGURE 4.1 – a) L'amplitude $\mathcal{F}_0(p, \dots; q, \dots)$; b) une composante de la fonction $k^\mu \mathcal{F}_\mu(p, \dots; q, \dots; k)$. Le photon (en rouge) d'impulsion k_μ et de polarisation ϵ_μ doit être inséré de toutes les façons possibles sur la ligne fermionique.

où les \dots dans \mathcal{F}_0 dénotent tous les impulsions externes qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter. On va considérer l'insertion d'un photon d'impulsion k et de vecteur polarisation $\epsilon^\mu(k)$ de toutes les façons possibles de long de la ligne fermionique (p, q). La quantité ainsi définie sera de la forme :

$$\epsilon^\mu(k) \mathcal{F}_\mu(p, \dots; q, \dots; k). \quad (4.5.140)$$

En fait, on va plutôt étudier $k^\mu \mathcal{F}_\mu(p, \dots; q, \dots; k)$ où on a remplacé le vecteur polarisation du photon par son impulsion. L'insertion du photon sur la ligne externe d'impulsion p contribuera :

$$\dots \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k} - m_e} \gamma^{\lambda_1} \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m_e} (-ie \not{k}) \frac{i}{\not{p} - m_e} = \dots \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k} - m_e} \gamma^{\lambda_1} e \left[-\frac{i}{\not{p} - m_e} + \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m_e} \right].$$

...

L'insertion du photon sur la ligne interne d'impulsion p_1 contribuera :

$$\dots \gamma^{\lambda_2} \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k} - m_e} (-ie \not{k}) \frac{i}{\not{p}_1 - m_e} \gamma^{\lambda_1} \frac{i}{\not{p} - m_e} = \dots \gamma^{\lambda_2} e \left[-\frac{i}{\not{p}_1 - m_e} + \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k} - m_e} \right] \gamma^{\lambda_1} \frac{i}{\not{p} - m_e}.$$

...

L'insertion du photon sur l'impulsion $q = p_n$ finale contribuera :

$$\frac{i}{\not{q} - m_e} (-ie \not{k}) \frac{i}{\not{q} + \not{k} - m_e} \gamma^{\lambda_n} \frac{i}{\not{p}_{n-1} - m_e} \dots = e \left[-\frac{i}{\not{q} + \not{k} - m_e} + \frac{i}{\not{q} - m_e} \right] \gamma^{\lambda_n} \frac{i}{\not{p}_{n-1} - m_e} \dots$$

Le résultat de l'insertion du photon sur la ligne fermionique sera la somme des termes ci-dessus, mais on voit que les termes se compensent 2 à 2 (le terme de gauche dans le crochet d'une ligne compense le terme de droite de la ligne inférieure) de sorte que l'expression recherchée sera de la forme :

$$k^\mu \mathcal{F}_\mu(p, \dots; q, \dots; k) = e [\mathcal{F}_0(p - k, \dots; q, \dots) - \mathcal{F}_0(p, \dots; q + k, \dots)]. \quad (4.5.141)$$

Le photon doit également être couplé aux boucles internes de fermions, mais on sait qu'une boucle fermionique ne peut être couplée à un nombre impair de photons, donc de telles insertions ne contribuent pas puisque l'insertion d'un photon sur une boucle du diagramme aura forcément un nombre impair de photons. Dans l'éq. (4.5.141) le membre de gauche a un pôle à $\not{p} = m$ et un autre à $\not{q} = m$ tandis que chacun des membres de droite n'a qu'un de ces pôles⁸.

• **Application : amplitude de diffusion avec photons externes**

Si on ampute la fonction la fonction de Green $\mathcal{F}_\mu(p, \dots; q, \dots; k)$ des propagateurs externes on obtient la fonction de Green tronquée $\mathcal{M}_\mu(p, \dots; q, \dots; k)$, et si de plus on met les fermions sur couche de masse, c'est à dire

$$\mathcal{M}_\mu(p, \dots; q, \dots; k) = (\not{p} - m) (\not{q} - m) \mathcal{F}_\mu(p, \dots; q, \dots; k)|_{\not{p}, \not{q} \rightarrow m}, \quad (4.5.142)$$

on obtient

$$k^\mu \mathcal{M}_\mu(p, \dots; q, \dots; k) = 0 \quad (4.5.143)$$

puisque qu'aucun des termes du membre de droite de l'éq. (4.5.141) n'a les deux pôles. En fait l'expression $\epsilon^\mu(k) \mathcal{M}_\mu(p, \dots; q, \dots; k)$ est proportionnelle à une amplitude de diffusion et l'éq. ci-dessus montre que si l'on substitue à la polarisation du photon l'impulsion du photon (réel ou virtuel) alors la combinaison est nulle. C'est une contrainte que doit satisfaire toute amplitude avec photons externes.

• **Application : identité de Ward et relation $Z_1 = Z_2$**

L'éq. (4.5.141) permet de trouver une relation entre la fonction vertex $\Lambda^\mu(p; q)$ étudiée en sec. 4.3 et le propagateur du fermion $S_F(q)$. Cette discussion est valable à n'importe quel ordre de la théorie des perturbations étant entendu que les diagrammes considérés sont régularisés mais ne contiennent pas les contre-termes. Dans ce cas, la fonction $\mathcal{F}_0(p, \dots; q, \dots)$ est simplement le propagateur du fermion et \mathcal{F}^μ de l'éq. (4.5.141) est le vertex fermion-fermion-photon incluant les propagateurs des fermions externes. On peut alors écrire :

$$k^\mu S_F(q) [-ie \Lambda^\mu(p; q)] S_F(p) = e (S_F(p - k) - S_F(q + k)) \quad (4.5.144)$$

que l'on simplifie en

$$k^\mu [-ie \Lambda^\mu(p; q)] = e (S_F^{-1}(q + k) - S_F^{-1}(q)), \quad (4.5.145)$$

8. Le raisonnement ci-dessus peut être répété pour toutes les lignes fermioniques du diagramme.

où on a utilisé le fait que $p - k = q$. Cette égalité est évidente à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations où $\Lambda^\mu(p; q) = \gamma^\mu$. Aux ordres plus élevés elle implique que les termes divergents dans le vertex sont les mêmes que ceux de la combinaison de l'inverse des propagateurs du membre de droite. Après avoir substitué dans le membre de droite la forme éq. (4.2.54) du propagateur du fermion où l'on a omis les contre-termes,

$$S_F(p) = \frac{i}{(\not{p} - m - \Sigma_0 + i\epsilon)(1 - \Sigma_1)},$$

on trouve :

$$\begin{aligned} k^\mu \Lambda_\mu(q + k; q) &= k^\mu (\gamma_\mu + \Lambda_\mu^{\text{boucles}}(q + k; q)) \\ &= \not{k} - \not{k}\Sigma_1, \end{aligned} \quad (4.5.146)$$

ce qui permet de conclure que :

$$\Lambda_\mu^{\text{boucles}}(q + k; q) = -\gamma_\mu \Sigma_1, \quad (4.5.147)$$

c'est à dire que les divergences ultraviolettes du vertex sont proportionnelles à γ_μ et que, de plus, elles sont les mêmes que celles qui affectent Σ_1 . Le contre-terme qui compensera les divergences du vertex sera donc de la forme $\delta Z_1 \gamma_\mu$ et δZ_1 contiendra les mêmes termes divergents que le contre-terme de la fonction d'onde du fermion qui satisfait $\delta Z_2 - \Sigma_1 \sim \text{fini}$ dans l'ultraviolet, éq. (4.2.58), et ceci quelque soit l'ordre des perturbations. Il est conventionnel de choisir alors $\delta Z_1 = \delta Z_2$.

4.6 Degré superficiel de divergence d'un diagramme

Dans la section précédente on a identifié trois diagrammes divergents dans l'ultraviolet ? Sont ils les seuls ? D'autre part, il est intéressant de pouvoir identifier tous les diagrammes potentiellement divergents dans l'ultraviolet à tous les ordres. Pour cela on introduit le degré superficiel de divergence $\omega(\mathbf{G})$ d'un graphe \mathbf{G} comme la dimension en terme d'impulsion ou de masse de l'intégrale correspondant à ce graphe. On prend $\hbar = c = 1$ comme d'habitude et on étudie le comportement du diagramme supposant que toutes les composantes des impulsions internes tendent vers l'infini. En effet, on s'attend à ce que cette configuration produise la divergence maximale : si $\omega(\mathbf{G}) \geq 0$ le diagramme est potentiellement divergent. On peut le calculer sur la base d'une analyse dimensionnelle des différents éléments de ce graphe. Le résultat s'applique aux diagrammes *irréductibles à une particule* c'est à dire à ceux qui ne peuvent pas être séparés en deux parties disjointes en coupant une ligne interne. On travaille dans un espace-temps à 4 dimensions.

On considère un diagramme arbitraire caractérisé par :

1. E_F fermions externes et E_B bosons externes ;
2. I_F propagateurs fermioniques et I_B propagateurs bosoniques : pour chaque propagateur de fermion on associe un facteur $1/p$ et chaque propagateur de boson un facteur $1/p^2$;
3. n_i vertex de type i avec $N = \sum_i n_i$ le nombre total de vertex. Certains vertex peuvent dépendre des impulsions et donc avoir une dimension d_i comme en QCD, par exemple, où le vertex à 3 gluons est linéaire en les impulsions et apporte en conséquence un facteur p à chaque vertex ($d_i = 1$ dans ce cas). En QED le vertex est sans dimension ;

4. L le nombre de variables d'impulsions indépendantes sur lesquelles il faut intégrer, chacune de ces impulsions contribuant un facteur d^4p .

Le degré superficiel de divergence du diagramme est donc :

$$\omega(\mathbf{G}) = 4L - I_F - 2I_B + \sum_i n_i d_i. \quad (4.6.148)$$

Si $\omega(\mathbf{G}) = 0$ la divergence est potentiellement logarithmique ($\int dq/q$), pour $\omega(\mathbf{G}) = 1$ elle serait linéaire et quadratique pour $\omega(\mathbf{G}) = 2$. En QED, le dernier terme est absent car l'unique type de couplage est sans dimension.

On a la relation :

$$L = I_B + I_F - (N - 1) \quad (4.6.149)$$

qui exprime le fait que le nombre d'impulsions indépendantes est égal au nombre d'impulsions internes moins le nombre de contraintes sur la conservation d'énergie-impulsion. Il y a une contrainte par vertex mais les N vertex n'apportent que $N - 1$ contraintes du fait de la conservation d'énergie-impulsion globale. Il est utile de relier le nombre de propagateurs au nombre de pattes externes de même type. Pour cela on compte le nombre de fermions de deux façons différentes en se rappelant qu'un propagateur compte pour deux fermions. Ainsi on a :

$$E_F + 2I_F = \sum_i n_i f_i \quad (4.6.150)$$

où le vertex de type i a f_i fermions attachés. De même pour les bosons :

$$E_B + 2I_B = \sum_i n_i b_i \quad (4.6.151)$$

où le vertex de type i a b_i bosons attachés. Par exemple, pour QED il y a un seul type de vertex, $i = 1$, et $f_i = 2$ et $b_i = 1$. La combinaison des équations ci-dessus permet d'écrire :

$$\omega(\mathbf{G}) = 4 - E_B - \frac{3}{2}E_F + \sum_i n_i (b_i + d_i + \frac{3}{2}f_i - 4) \quad (4.6.152)$$

Il existe une contrainte sur le dernier terme que l'on obtient par une analyse dimensionnelle similaire à celle de la section 3.2.4 : en effet si le vertex de type i provient d'un terme du lagrangien de la forme :

$$g_i \underbrace{\psi \cdots \psi}_{f_i} \underbrace{A \cdots A}_{b_i} \underbrace{\partial_\mu \cdots \partial_\mu}_{d_i} \quad (4.6.153)$$

couplant f_i fermions et b_i bosons avec d_i dérivées et un couplage g_i qui peut être dimensionné de dimension $[g_i]$, alors on a la relation :

$$0 = -4 + [g_i] + b_i + d_i + \frac{3}{2}f_i, \quad (4.6.154)$$

d'où le résultat final :

$$\boxed{\omega(\mathbf{G}) = 4 - E_B - \frac{3}{2}E_F - \sum_i n_i [g_i].} \quad (4.6.155)$$

qui montre que le degré superficiel de divergence ne dépend que du nombre de pattes externes et des constantes de couplage dimensionnés, et qu'il est d'autant plus petit que le nombre de pattes est grand. En QED le résultat est encore plus simple puisqu'aucun couplage n'est dimensionné et le dernier terme peut donc être ignoré. Le cas de QCD est un peu particulier et il est discuté au chapitre 8 (voir la discussion menant à l'éq. (8.1.9)).

D'après l'équation ci-dessus, en QED, les seuls diagrammes superficiellement divergents sont :

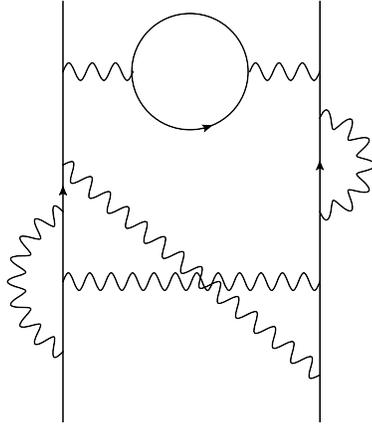
- pour $E_B = 0, E_F = 2 \Rightarrow \omega(\mathbf{G}) = 1$, la self-énergie du fermion ;
- pour $E_B = 1, E_F = 2 \Rightarrow \omega(\mathbf{G}) = 0$, le vertex ;
- pour $E_B = 2, E_F = 0 \Rightarrow \omega(\mathbf{G}) = 2$, la polarisation du vide ;
- pour $E_B = 3, E_F = 0 \Rightarrow \omega(\mathbf{G}) = 1$, diagramme à 3 photons ;
- pour $E_B = 4, E_F = 0 \Rightarrow \omega(\mathbf{G}) = 0$, diagramme en boîte à quatre photons.

Les trois premiers diagrammes ont été calculés et on a vérifié qu'ils sont effectivement divergents. Pour les deux dernier cas, si les diagrammes à trois ou quatre photons sont individuellement divergents, l'amplitude ou la fonction de Green correspondante ne l'est pas. En effet, dans le cas à trois photons l'amplitude (à une boucle) est la somme de deux diagrammes dont on peut explicitement se convaincre qu'elle est nulle. Plus généralement, le photon ayant une parité C négative ($A_\mu(x) \rightarrow -A_\mu(x)$ par tranformation de parité C) l'amplitude à un nombre impair de photons est nulle puisque l'interaction électromagnétique conserve la parité. Dans le cas à quatre photons, l'amplitude ou la fonction de Green correspondante est la somme de trois diagrammes qui est finie. Ceci est une conséquence de l'invariance de jauge. L'amplitude, tronquée des vecteurs polarisation, $\mathcal{M}_{\mu\nu\rho\sigma}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ peut être écrite comme une somme de tenseurs (correctement symétrisés), $g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}$, $p_{i\mu}p_{j\nu}g_{\rho\sigma}$, $p_{i\mu}p_{j\nu}p_{k\rho}p_{l\sigma}$ à coefficients scalaires. Les contraintes :

$$p_i^\mu \mathcal{M}_{\mu\nu\rho\sigma}(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0,$$

par exemple, implique que le coefficient des termes en $g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}$ est proportionnel aux $p_i \cdot p_j$ et le résultat final sera de la forme $p_i \cdot p_j \int d^4p/p^6$ ou $p_i \cdot p_j p_k \cdot p_l \int d^4p/p^8$ donc convergent. En fait comme pour la polarisation du vide, qui n'a qu'une divergence logarithmique au lieu de quadratique (voir la discussion sur la contrainte d'invariance de jauge en sec. 4.1), l'invariance de jauge réduit le degré de divergence de l'amplitude à quatre photons. Si cette amplitude avait été divergente, QED n'aurait pas été renormalisable puisqu'il n'y a pas dans le lagrangien de contre-terme (terme en $(A_\mu)^4$) pour compenser une telle divergence !

On peut avoir un diagramme superficiellement convergent avec $\omega(\mathbf{G}) < 0$ dont des sous-diagrammes sont divergents comme par exemple l'insertion d'une self-énergie sur une ligne fermionique interne ou bien d'une correction au vertex. De telles divergences sont compensées par les contre-terms calculés dans les sections précédentes. Par exemple, le diagramme de diffusion de deux fermions ci-dessous est fini après inclusion des contre-terms δZ_i de QED.



Dans un diagramme avec $\omega(\mathbf{G}) < 0$, une fois la renormalisation des sous-diagrammes divergents à deux et à trois points effectuée il n'apparaît pas de nouvelle divergence. Pour les trois diagrammes avec $\omega(\mathbf{G}) \geq 0$ les divergences aux ordres supérieurs de la théorie des perturbations sont compensées par le choix des contre-termes Z_i exprimés sous la forme d'un développement perturbatif à coefficients divergents.

Il existe des théories ou modèles avec un couplage dimensionné : par exemple, dans le modèle de Fermi de l'interaction faible, la constante de Fermi $G_F = 1,166 \cdot 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ ou, en relativité, la constante gravitationnelle (de Newton) $G_N = 6,708 \cdot 10^{-39} \text{GeV}^{-2}$ dans le système d'unité $\hbar = c = 1$ ($[G_N] = [G_F] = -2$). Le degré de divergence $\omega(\mathbf{G})$, éq. (4.6.155), croît alors avec le nombre de vertex et la théorie est non renormalisable. Par exemple, dans le modèle de Fermi le terme d'interaction est de la forme $G_F \bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$, qui doit aussi être la forme du contre-terme. Il est cependant facile de se convaincre que l'amplitude à 6 fermions a un degré de divergence $\omega(\mathbf{G}) = 1$ et que la divergence ultraviolette associée n'est pas compensée par un contre-terme du lagrangien.