

## Chapitre 5

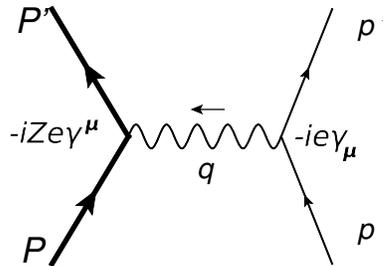
# Compensation des divergences infrarouges

Dans ce chapitre nous allons illustrer sur un exemple concret le théorème de Lee-Kinoshita-Nauenberg<sup>1</sup>, selon lequel les divergences infrarouges se compensent entre termes réels et virtuels lorsque l'on définit correctement l'observable. Nous considérons la diffusion d'un électron sur un noyau de charge  $Ze$  et de masse  $M$  beaucoup plus grande que toute autre échelle d'énergie du processus. Seule la radiation d'un photon par l'électron sera prise en compte. Le calcul est mené dans le cadre de la régularisation dimensionnelle et du schéma de renormalisation  $\overline{MS}$ .

### 5.1 Terme de Born

On travaille dans le repère du noyau au repos et on définit la cinématique comme suit :

$$\begin{aligned}
 \text{noyau initial} & : P = (M, \vec{0}), & \text{noyau final} & : P = (E', \vec{P}') \\
 \text{électron entrant} & : p = (\omega, \vec{p}), & \text{électron sortant} & : p' = (\omega', \vec{p}'), \\
 \text{impulsion de transfert} & : q^2 = (p - p')^2 = 2m_e^2 - 2(\omega\omega' - pp' \cos \theta)
 \end{aligned}
 \tag{5.1.1}$$



Pour simplifier l'écriture et les calculs on se place dans la limite

$$M^2 \gg \omega\omega' \sim -q^2 \gg m_e^2 \tag{5.1.2}$$

1. T. Kinoshita, J.Math.Phys. **3** (1962), 650; T.D. Lee, M. Nauenberg Phys.Rev. **133** (1964), B1549.

de telle sorte qu'on puisse considérer le noyau comme statique et  $q^2 \sim -2\omega\omega'(1 - \cos\theta)$ . L'élément de matrice à l'ordre le plus bas s'écrit :

$$\mathcal{M}^{(0)} = Z(-ie)^2 \bar{u}(P')\gamma_\mu u(P) \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \quad (5.1.3)$$

Du fait que le noyau est statique l'interaction photon-noyau se réduit à  $\bar{u}(P)\gamma_0 u(P)$  et le module de l'élément de matrice au carré moyenné sur les états de spins initiaux et sommé sur les spins finals de l'électron et le noyau devient alors :

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}|\mathcal{M}^{(0)}|^2 &= \frac{1}{4}Z^2 e^4 \text{Tr} \mathbf{P}' \gamma_0 \mathbf{P} \gamma_0 \frac{1}{(q^2)^2} \text{Tr} \not{p}' \gamma^0 \not{p} \gamma^0 \\ &= Z^2 e^4 \frac{M^2}{\omega\omega'} \frac{1 + \cos\theta}{(1 - \cos\theta)^2}. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

La section efficace s'écrit :

$$\sigma^{(0)} = \frac{1}{4M\omega} \int \frac{d^3 P'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2\omega'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P + p - P' - p') \bar{\Sigma}|\mathcal{M}^{(0)}|^2, \quad (5.1.5)$$

où le facteur de flux est  $4\sqrt{(p \cdot P)^2 - m_e^2 M^2} \simeq 4M\omega$  dans le cadre des approximations (5.1.2). On peut faire l'intégrale sur l'impulsion finale  $P'$  du noyau à l'aide de la fonction  $\delta$  de conservation d'énergie-impulsion pour obtenir  $\delta(2M(\omega - \omega') + q^2)$  qui se simplifie en  $\delta(\omega - \omega')/2M$  toujours dans le cadre de nos approximations. La section efficace différentielle en l'angle solide  $\Omega = (\theta, \phi)$  de diffusion de l'électron devient finalement :

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2 \cos^2(\theta/2)}{8 \omega^2 \sin^4(\theta/2)} \int d\omega' \delta(\omega - \omega'), \quad (5.1.6)$$

que l'on écrira pour un usage ultérieur :

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega d\omega'} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega} \delta(\omega - \omega'). \quad (5.1.7)$$

## 5.2 Corrections virtuelles

Ces corrections ont été calculées au chapitre précédent. Elles sont illustrées dans la figure ci-dessous à laquelle il faut ajouter les diagrammes avec les contre-termes. Ce sont :

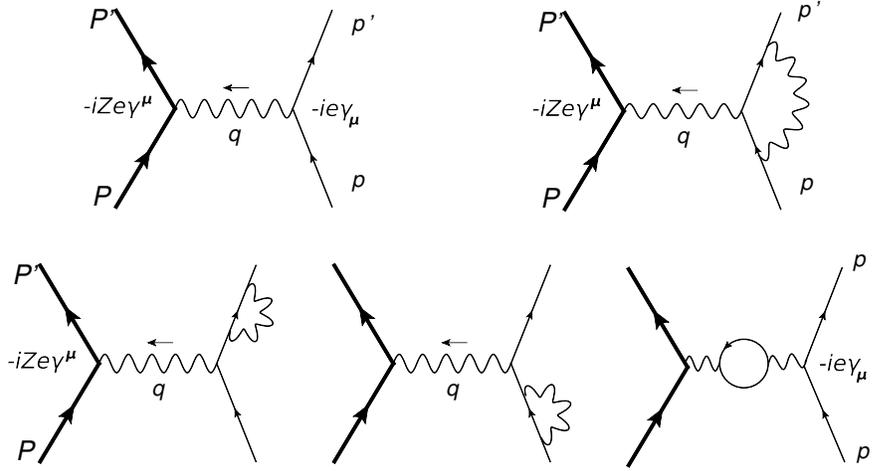
- correction au vertex : elle est donnée par l'éq. (4.3.108) et, ignorant le moment magnétique anomal de l'électron qui est fini et dont le calcul de la contribution à la section efficace ne présente pas de difficultés, ce sera le facteur multiplicatif  $F_1^{\overline{MS}}(q^2)$  au vertex  $\gamma_\mu$  de la ligne d'électron ;
- correction de self-énergie sur les pattes externes : il faudra utiliser  $u(p)|_{\overline{MS}}$  et  $\bar{u}(p')|_{\overline{MS}}$  (éq. (4.2.80)) comme spineurs pour les électrons, soit pour prendre en compte les deux diagrammes ainsi que le terme de Born :

$$\bar{u}(p')|_{\overline{MS}} \gamma_\mu u(p)|_{\overline{MS}} = \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) (1 + \Sigma_1^{\overline{MS}}); \quad (5.2.1)$$

- correction au propagateur du photon : elle est prise en compte, comme discuté en sec. (4.1.1), en utilisant dans l'expression de  $\mathcal{M}^{(0)}$ , non pas la charge renormalisée  $\alpha_{\overline{MS}}$  mais la charge effective définie en éq. (4.1.36) :

$$\bar{\alpha}(q^2, \alpha_{\overline{MS}}) = \alpha_{\overline{MS}} / (1 + \Pi^{\overline{MS}}(q^2)) \sim \alpha_{\overline{MS}}(\mu^2) / (1 - \frac{\alpha_{\overline{MS}}}{3\pi} \ln \frac{q^2}{\mu^2})$$

qui comme on l'a vu est indépendante du schéma de renormalisation, donc du paramètre arbitraire  $\mu$ .



En résumé les corrections virtuelles sont donc un facteur multiplicatif au terme de Born et on a :

$$\mathcal{M}^{(0)} + \mathcal{M}_V^{(1)} = \mathcal{M}^{(0)} (1 + F_1^{\overline{MS}}(q^2) + \Sigma_1^{\overline{MS}}) \quad (5.2.2)$$

On rappelle l'expression du facteur  $\Sigma_1^{\overline{MS}}$  éq. (4.2.80) :

$$\Sigma_1^{\overline{MS}} = \frac{\alpha}{2\pi} \left[ - \left( \frac{1}{\epsilon_{\text{ir}}} - \gamma + \ln(4\pi) \right) - \frac{3}{2} \ln \frac{\mu^2}{m_e^2} - 2 \right]. \quad (5.2.3)$$

On simplifiera  $F_1^{\overline{MS}}(q^2)$ , en accord avec nos hypothèses cinématiques, en prenant la limite  $-q^2 \gg m_e^2$  de sorte que les intégrales  $I_0$ ,  $I_1$  et  $I_2$  se réduisent à (voir éqs. (4.3.101), (4.3.104) respectivement) :

$$I_0 \sim \ln \frac{-q^2}{\mu^2}, \quad I_1 \sim -\frac{2}{q^2} \ln \frac{-q^2}{m_e^2}, \quad I_2 \sim -\frac{2}{q^2} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \ln \frac{-q^2}{m_e^2} - \frac{1}{q^2} \ln^2 \frac{-q^2}{m_e^2}, \quad -q^2 \gg m_e^2 \quad (5.2.4)$$

et :

$$F_1^{\overline{MS}}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left( 2 \left[ \frac{1}{\epsilon_{\text{ir}}} - \gamma + \ln(4\pi) \right] \ln \frac{-q^2}{m_e^2} - 2 \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \ln \frac{-q^2}{m_e^2} - \ln^2 \frac{-q^2}{m_e^2} - \ln \frac{-q^2}{\mu^2} + 4 \ln \frac{-q^2}{m_e^2} \right). \quad (5.2.5)$$

On note la présence de deux types de logarithmes : ceux, non physiques, associés au schéma de renormalisation en  $\ln(-q^2/\mu^2)$  et ceux, cinématiques, associés à la masse de l'électron qui seraient

divergents dans le cas d'une masse nulle (singularité de masse ou colinéaire). Le résultat exact de  $F_1^{\overline{MS}}(q^2)$  contient évidemment d'autres termes "finis", non logarithmiques, indépendants de  $\mu$  et réguliers dans la limite  $m_e \rightarrow 0$ . La contribution des diagrammes virtuels à la section efficace est l'interférence entre l'amplitude de Born et  $\mathcal{M}_V^{(1)}$  et elle s'écrira donc :

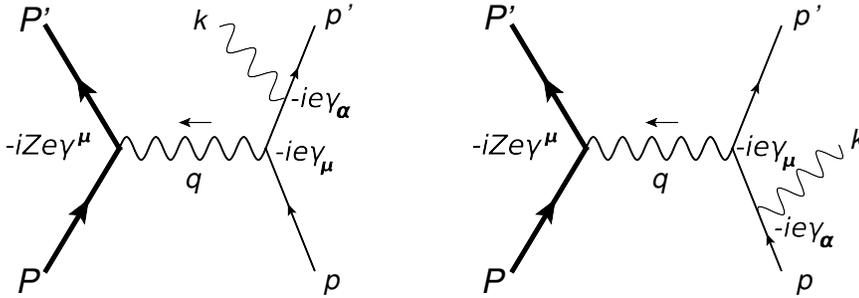
$$\frac{d\sigma_V^{(1)}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega} \int d\omega' \delta(\omega - \omega') (2 F_1^{\overline{MS}} + 2 \Sigma_1^{\overline{MS}}). \quad (5.2.6)$$

Regroupant avec le terme de Born on aura donc la contribution à la section efficace différentielle :

$$\frac{d\sigma_V^{(0)+(1)}}{d\Omega d\omega'} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega} (1 + 2 F_1^{\overline{MS}} + 2 \Sigma_1^{\overline{MS}}) \delta(\omega - \omega'). \quad (5.2.7)$$

### 5.3 Corrections réelles

Elles sont obtenues en prenant en compte les deux diagrammes où un photon réel est émis par le lepton :



L'amplitude correspondante est :

$$\mathcal{M}_R^{(1)} = iZe^2 \bar{u}(P') \gamma_0 u(P) \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(p') \left[ \gamma^0 \frac{\not{p} - \not{k} + m_e}{(p - k) - m_e^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \frac{\not{p}' + \not{k} + m_e}{(p' + k) - m_e^2 + i\epsilon} \gamma^0 \right] u(p) \varepsilon_\alpha(k) \quad (5.3.1)$$

où  $\varepsilon_\alpha(k)$  est le vecteur polarisation du photon. Pour étudier le comportement infrarouge de cette amplitude on néglige  $k$  devant  $p$  ou  $p'$  dans le numérateur ("approximation du photon mou") ce qui permet de simplifier considérablement la partie entre crochets par les manipulations suivantes :

$$\begin{aligned} (\not{p} + m_e) \gamma^\alpha u(p) \varepsilon_\alpha(k) &= (-\gamma^\alpha \not{p} + m_e \gamma^\alpha + 2 p^\alpha) u(p) \varepsilon_\alpha(k) \\ &= 2 p \cdot \varepsilon(k) u(p) \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

après usage de l'équation de Dirac. Ceci permet d'écrire la contribution des diagrammes réels comme un facteur multiplicatif à l'amplitude de Born :

$$\mathcal{M}_R^{(1)} = e \left[ \frac{p' \cdot \varepsilon(k)}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \varepsilon(k)}{p \cdot k} \right] \mathcal{M}^{(0)}, \quad (5.3.3)$$

expression valable dans l'approximation infrarouge (on a négligé un terme en  $k^2$  devant  $p \cdot k$  ou  $p' \cdot k$  dans les dénominateurs). L'amplitude au carré sera alors après sommation sur la polarisation du photon (on utilise l'éq. (2.4.56)) :

$$\overline{\Sigma} |\mathcal{M}_R^{(1)}|^2 = \overline{\Sigma} |\mathcal{M}^{(0)}|^2 e^2 \left[ \frac{2 p \cdot p'}{p \cdot k p' \cdot k} - \frac{m_e^2}{(p \cdot k)^2} - \frac{m_e^2}{(p' \cdot k)^2} \right]. \quad (5.3.4)$$

On obtient la section efficace par :

$$\begin{aligned} \sigma_R^{(1)} = \frac{1}{4M\omega} \int \frac{d^3 P'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2\omega'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P + p - P' - p' - k) \overline{\Sigma} |\mathcal{M}^{(0)}|^2 \\ \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k} e^2 \left[ \frac{2 p \cdot p'}{p \cdot k p' \cdot k} - \frac{m_e^2}{(p \cdot k)^2} - \frac{m_e^2}{(p' \cdot k)^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

L'intégration sur les impulsions finales  $P'$  et  $p'$  du noyau et de l'électron se fait de la même manière qu'en éqs. (5.1.5) et (5.1.6) ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d\sigma_R^{(1)}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega} \int d\omega' \delta(\omega - \omega' - k) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k} e^2 \left[ \frac{2 p \cdot p'}{p \cdot k p' \cdot k} - \frac{m_e^2}{(p \cdot k)^2} - \frac{m_e^2}{(p' \cdot k)^2} \right], \quad (5.3.6)$$

où on a factorisé dans la section efficace une partie proportionnelle à la section efficace de Born (dans laquelle on a pris  $\omega' = \omega$ , négligeant ainsi la dépendance en  $k$  en accord avec l'approximation qui mène à l'éq. (5.3.3)). Il est évident que chacun des termes entre crochets est divergent quand l'impulsion  $k$  du photon tend vers 0 puisque chacun des termes se comporte comme  $\int dk/k$  : ces sont des termes singuliers dans l'infrarouge. Pour régulariser ces divergences on va évaluer l'intégrale dans un espace à  $n - 1$  dimensions avec, comme dans le chapitre précédent,  $n = 4 - 2\varepsilon$  ce qui amène à faire la substitution :

$$e^2 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k} \rightarrow e^2 \mu^{2\varepsilon} \frac{d^{n-1} k}{(2\pi)^{n-1} 2k} \quad (5.3.7)$$

où l'introduction du facteur  $\mu^{2\varepsilon}$  est nécessaire pour que la section efficace garde la bonne dimension. Pour évaluer de telles intégrales on se reporte aux éqs. (3.2.12), (3.2.13) avec la différence que l'on a ici un vecteur euclidien en  $(n - 1)$  dimensions et que l'intégrale sur l'angle polaire  $\theta_1$  du photon avec l'électron ne peut être faite à l'aide de l'éq. (3.2.14) puisque l'intégrand en dépend. Considérons par exemple le terme :

$$e^2 \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^{n-1} k}{(2\pi)^{n-1} 2k} \frac{m_e^2}{(p \cdot k)^2} = \frac{e^2 \mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^{n-1}} \int \frac{k^{n-3} dk}{2} \int_0^\pi (\sin \theta_1)^{n-3} d\theta_1 \int d\Omega_{n-3} \frac{m_e^2}{k^2 (\omega - p \cos \theta_1)^2}. \quad (5.3.8)$$

Faisant l'intégrale sur l'angle solide  $d\Omega_{n-3}$  à l'aide de l'éq. (3.2.14) et passant à la notation en  $\varepsilon$  il faudra alors calculer :

$$\frac{\alpha}{2\pi} \frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{\Gamma(1 - \varepsilon)} \int \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta_1)^{-\varepsilon} d \cos \theta_1 \frac{m_e^2}{(\omega - p \cos \theta_1)^2}. \quad (5.3.9)$$

On remarque que les intégrales sur l'impulsion et l'angle polaire se factorisent, la première donnant lieu à la divergence infrarouge régularisée  $-1/\varepsilon_{\text{ir}}$ . La section efficace différentielle de production avec émission d'un photon pourra alors s'écrire :

$$\frac{d\sigma_R^{(1)}}{d\Omega d\omega'} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega} \mu^{2\varepsilon} \int \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} \delta(\omega - \omega' - k) (2 J_1 + J_2) \quad (5.3.10)$$

avec :

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{(4\pi)^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta_1)^{-\varepsilon} d \cos \theta_1 \frac{m_e^2}{(p \cdot \hat{k})^2} \\ J_2 &= \frac{\alpha}{2\pi} \frac{(4\pi)^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta_1)^{-\varepsilon} d \cos \theta_1 \frac{2 p \cdot p'}{p \cdot \hat{k} p' \cdot \hat{k}}, \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

où  $\hat{k} = (1, \vec{k}/|k|)$  définit l'angle  $\theta_1$  du photon avec l'impulsion de l'électron. Pour évaluer facilement  $J_2$  on peut choisir un repère tel que  $\vec{p} + \vec{p}' = 0$ .

## 5.4 Définition de la section efficace

Avant d'évaluer ces expressions il convient de définir l'observable que l'on veut calculer. On mesure le taux de diffusion d'un électron relativiste d'énergie  $\omega'$  à un angle solide  $\Omega = (\theta, \phi)$  après diffusion sur un noyau statique. On distingue deux possibilités. Si  $\omega' < \omega$ , seules les corrections réelles apportent une contribution et on a d'après l'éq. (5.3.10) :

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega d\omega'} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega} \frac{1}{\omega - \omega'} (2 J_1 + J_2), \quad \omega' < \omega, \quad (5.4.1)$$

où on a fait  $\varepsilon = 0$  puisque  $\omega - \omega'$  agit comme cut-off infra-rouge. On rappelle que cette expression est valable pour une énergie du photon  $\omega - \omega'$  pas trop grande devant  $\omega$  du fait de nos hypothèses cinématiques simplificatrices. En fait, le détecteur a une certaine résolution  $\delta\omega$  en énergie, c'est à dire que la section efficace observée sera définie comme la moyenne de la section efficace mesurée dans le petit intervalle  $[\omega' - \delta\omega, \omega']$  soit :

$$\frac{d\sigma^{\text{obs}}}{d\Omega d\omega'} = \frac{1}{\delta\omega} \int_{\omega' - \delta\omega}^{\omega'} d\omega'' \frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega d\omega''} \approx \frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega d\omega'}. \quad (5.4.2)$$

Si maintenant  $\omega' = \omega$ , alors Born, réels et virtuels contribuent de sorte que on a :

$$\frac{d\sigma^{\text{obs}}}{d\Omega d\omega} = \frac{1}{\delta\omega} \int_{\omega - \delta\omega}^{\omega} d\omega' \frac{d\sigma}{d\Omega d\omega'}. \quad (5.4.3)$$

où l'intégrand est la somme des contributions éqs. (5.2.7) et (5.3.10). Dans le calcul il faudra donc prendre en compte le cas où l'électron est produit avec une énergie exactement  $\omega$  par les diagrammes de Born et virtuels, ainsi que celui où l'électron est diffusé avec émission d'un photon de faible énergie. La prédiction théorique est donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{\text{obs}}}{d\Omega d\omega} &= \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega} \frac{1}{\delta\omega} \int_{\omega - \delta\omega}^{\omega} d\omega' \left[ (1 + 2 F_1^{\overline{MS}} + 2 \Sigma_1^{\overline{MS}}) \delta(\omega - \omega') \right. \\ &\quad \left. + \mu^{2\varepsilon} \int_0^{\omega} \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} \delta(\omega - \omega' - k) (2 J_1 + J_2) \right] \\ &= \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega \delta\omega} [1 + 2 F_1^{\overline{MS}} + 2 \Sigma_1^{\overline{MS}} + \mu^{2\varepsilon} \int_0^{\delta\omega} \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} (2 J_1 + J_2)]. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

L'énergie du photon est contrainte par la résolution du détecteur,  $k < \delta\omega$ , résolution supposée très petite devant  $\omega$  ce qui justifie l'approximation  $\omega = \omega'$  que l'on fera dans l'évaluation des intégrales réelles. Ainsi on aura par exemple<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta\omega} \mu^{2\varepsilon} \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} J_1 &= -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^{\delta\omega} \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta_1)^{-\varepsilon} d \cos \theta_1 \frac{m_e^2}{(\omega - p \cos \theta_1)^2} \\ &= -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{(4\pi)^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left[ -\frac{1}{2\varepsilon_{\text{ir}}} + \ln \frac{\delta\omega}{\mu} \right] \left[ 2 + 2\varepsilon \frac{\omega}{p} \ln \frac{(\omega + p)^2}{4m_e^2} \right] \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Le premier crochet est le résultat de  $\int dk$  et contient la "divergence" infrarouge (la notation  $\varepsilon_{\text{ir}}$  est un mnémonique pour rappeler l'origine de la singularité) accompagnée du terme "non-physique" en  $\ln \mu$ . On note que le terme en  $1/\varepsilon_{\text{ir}}$  est également à l'origine d'un  $\ln(\omega + p)^2/4m_e^2$  par compensation avec le terme en  $\varepsilon$  du deuxième crochet. On peut se rendre compte que les termes linéaires en  $k$  négligés dans les numérateurs de l'éq. (5.3.1) sont de la forme  $\int dk k^{-2\varepsilon}$  et ne donnent donc pas lieu à une divergence infrarouge ni à un terme logarithmique. Après simplification  $p \sim \omega$  et ne gardant que les "grands" termes logarithmiques on arrive à :

$$\int_0^{\delta\omega} \mu^{2\varepsilon} \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} J_1 = -\frac{\alpha}{2\pi} \left[ -\left( \frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} - \gamma + \ln 4\pi \right) + \ln \frac{(\delta\omega)^2}{\mu^2} - \ln \frac{\omega^2}{m_e^2} \right] \quad (5.4.6)$$

et de façon similaire :

$$\int_0^{\delta\omega} \mu^{2\varepsilon} \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} J_2 = \frac{\alpha}{\pi} \left[ -\left( \frac{1}{\varepsilon_{\text{ir}}} - \gamma + \ln 4\pi \right) \ln \frac{-q^2}{m_e^2} + \ln \frac{(\delta\omega)^2}{\mu^2} \ln \frac{-q^2}{m_e^2} + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{-q^2}{m_e^2} \right]. \quad (5.4.7)$$

On peut alors injecter dans l'éq. (5.4.4) les résultats ci-dessus et on trouve finalement :

$$\boxed{\frac{d\sigma^{\text{obs}}}{d\Omega d\omega} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega d\omega} \left[ 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left( -\ln \frac{-q^2}{\delta\omega^2} \ln \frac{-q^2}{m_e^2} + \ln \frac{-q^2}{\delta\omega^2} + \frac{3}{2} \ln \frac{-q^2}{m_e^2} + \text{termes finis} \right) \right]}, \quad (5.4.8)$$

qui est le résultat recherché. On voit que les termes en  $1/\varepsilon_{\text{ir}}$  ainsi que les termes dépendant de  $\mu$  sont compensés entre contributions réelles et virtuelles. Le paramètre non physique  $\mu$  a été remplacé par la résolution en énergie  $\delta\omega$  de l'appareil de mesure. Les termes en  $\ln^2(-q^2/m_e^2)$  se compensent aussi mais il reste des facteurs en  $\ln -q^2/m_e^2$  qui seraient divergents dans la limite  $m_e$  nulle : leur origine est l'intégrale angulaire sur  $\cos \theta_1$  dans l'éq. (5.4.5). Si on supposait  $m_e = 0$ , alors  $\omega = p$  et l'intégrale angulaire divergerait en 4 dimensions (divergences en masse ou colinéaires). Si  $-q^2$  est trop grand, ou si le détecteur a une résolution trop fine ( $\delta\omega$  trop petit), la correction en  $\alpha$  de l'équation précédente peut devenir grande et la section efficace calculée au deuxième ordre de la théorie des perturbations est négative ce qui n'a aucun sens. On peut en fait montrer que ces termes, restes de divergences infrarouges, peuvent être "re-sommés" à tous les ordres de la théorie des perturbations et s'exponentient pour trouver le résultat :

$$\frac{d\sigma^{\text{obs}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{\text{Born}}}{d\Omega} \exp \left[ -\frac{\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{-q^2}{\delta\omega^2} \ln \frac{-q^2}{m_e^2} + \ln \frac{-q^2}{\delta\omega^2} \right) \right] + \dots \quad (5.4.9)$$

2. Le terme en  $\varepsilon$  de l'intégrale angulaire peut facilement être obtenu à l'aide de

$$\int \frac{\ln x}{(a + bx)^2} = \frac{x \ln x}{a(a + bx)} - \frac{1}{ab} \ln(a + bx)$$

qui montre que la section efficace élastique tend vers 0, à petit  $\delta\omega$  ou à grands  $|q^2|$ , du fait de l'émission de photons mous.

• **Conclusions**

Les calculs perturbatifs engendrent deux types de "grands logarithmes" :

- d'origine infrarouge
- d'origine colinéaire

de sorte qu'après compensation entre termes réels et virtuels les termes résiduels dominants ont la structure suivante :

$$\frac{\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{-q^2}{\delta\omega^2} \ln \frac{-q^2}{m_e^2} (+) \ln \frac{-q^2}{\delta\omega^2} (+) \ln \frac{-q^2}{m_e^2} \right), \quad (5.4.10)$$

où  $\delta\omega$  est la résolution en énergie. Les termes d'origine infrarouge s'exponentient. En QCD, on suppose les quarks légers de masse nulle ce qui conduit à des divergences colinéaires qui seront régularisées soit par l'introduction d'une résolution angulaire comme dans le cas de la section efficace de production de jets (voir secs. 10.2 et 13.3), soit par l'introduction de fonction de structure de partons dans les hadrons (secs. 9.1 et 9.2) ou de hadrons dans les partons (sec. 10.3).