

Chapitre 7

Chromodynamique Quantique : QCD

7.1 Lagrangien QCD

Comme pour QED, nous partons du Lagrangien pour un fermion libre

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi \quad (7.1.1)$$

mais ψ dénote maintenant un triplet de spineurs de Dirac,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}.$$

On a donc ;

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_1(i \not{\partial} - m)\psi_1 + \bar{\psi}_2(i \not{\partial} - m)\psi_2 + \bar{\psi}_3(i \not{\partial} - m)\psi_3. \quad (7.1.2)$$

On suppose que ψ appartient à la représentation fondamentale du groupe (spécial unitaire) $SU(3)$, c'est un triplet de $SU(3)$: $\psi \in \mathbf{3}^1$. L'action sur ψ d'un élément U du groupe est donnée par

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} U^\dagger \quad (7.1.3)$$

et l'invariance de \mathcal{L} sous la transformation globale (rigide) découle directement de la propriété d'unitarité de U :

$$U^\dagger = U^{-1}.$$

D'après un résultat fondamental sur les groupes de Lie, tout élément U du groupe peut s'écrire,

$$U = e^{ig \sum_a \alpha^a T^a}, \quad a = 1, \dots, 8, \quad (7.1.4)$$

avec g le couplage, α^a des constantes réelles arbitraires et T^a , les générateurs de l'algèbre. La condition d'unitarité impose

$$T^a = T^{a\dagger}.$$

1. On aurait pu choisir $O(3)$ ou $U(3)$ comme groupe de symétrie mais ils sont exclus par les données expérimentales (voir sec. 7.7)

Appliquée à un élément de la représentation fondamentale de $SU(3)$, les générateurs T^a sont donc des matrices hermitiennes 3×3 . Puisque que l'on considère le groupe spécial $SU(3)$, on a de plus la condition, $\det U = 1$ ce qui impose

$$\text{Tr } T^a = 0.$$

On a donc bien 8 matrices T^a , $a = 1, \dots, 8$ pour $SU(3)$, qui satisfont aux relations de commutation d'une algèbre de Lie,

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (7.1.5)$$

avec f^{abc} totalement antisymétrique et réel. De plus, les générateurs T^a sont orthogonaux dans le sens où

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}. \quad (7.1.6)$$

Si on travaillait avec le groupe $U(3)$ on aurait une neuvième générateur qui serait la matrice unité, $\mathbf{1}$, 3×3 qui commute avec tous les T^a .

$$[\mathbf{1}, T^a] = 0,$$

et qui est donc un singulet de couleur (invariant) sous une transformation de $SU(3)$.

• Invariance par changement de phase locale

On suppose maintenant que les paramètres α^a deviennent des fonctions de la coordonnée d'espace-temps, $\alpha^a \rightarrow \alpha^a(x)$ et on note :

$$U(x) = e^{ig\alpha^a(x)T^a}, \quad a = 1, \dots, 8, \quad (7.1.7)$$

où la sommation sur les indices de couleur a est implicite. L'action d'un élément du groupe sur les fermions est :

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)U^\dagger(x) \quad (7.1.8)$$

Il est pratique de considérer une transformation de jauge infinitésimale :

$$U(x) = 1 + ig\alpha^a(x)T^a \quad (7.1.9)$$

de sorte que la variation des différents termes du lagrangien éq. (7.1.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta\psi(x) &= ig\alpha^a(x)T^a\psi(x), & \delta\bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}(x)(-ig\alpha^a(x)T^a) \\ \delta\{\partial_\mu\psi(x)\} &= \partial_\mu\delta\psi(x) = ig\alpha^a(x)T^a\partial_\mu\psi(x) + ig(\partial_\mu\alpha^a(x))T^a\psi(x) \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

et celle du lagrangien est donc :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \delta\bar{\psi}(x) i \not{\partial}\psi(x) + \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu\delta\{\partial_\mu\psi(x)\} - \delta\bar{\psi}(x)m\psi - \bar{\psi}m\delta\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x) \{-g(\partial_\mu\alpha^a(x))T^a\gamma^\mu\} \psi(x). \end{aligned}$$

Le lagrangien n'est donc plus invariant à cause du terme dérivatif proportionnel à $\partial_\mu\alpha^a(x)$. Par analogie avec QED, on introduit des champs vecteurs, $A_\mu^b(x)$, et on ajoute dans le lagrangien un terme qui a la même structure de groupe $SU(3)$ et de Lorentz que le terme en $\partial_\mu\alpha^a(x)T^a$, soit :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) \left(i(\partial_\mu - igA_\mu^b(x)T^b)\gamma^\mu - m \right) \psi(x), \quad b = 1, \dots, 8,$$

et on choisit la loi de transformation de ces champs de façon à rétablir l'invariance du lagrangien. Pour cela on introduit la notation :

$$\mathcal{D}_\mu \psi(x) = (\partial_\mu - igA_\mu^b(x)T^b) \psi(x), \quad (7.1.11)$$

et on impose que $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^b(x)T^b$ soit une dérivée covariante, c'est à dire que l'on impose la loi de transformation :

$$(\mathcal{D}_\mu \psi(x))' := \mathcal{D}'_\mu \psi'(x) = \mathcal{D}'_\mu U(x)\psi = U(x)\mathcal{D}_\mu \psi(x), \quad \forall \psi(x). \quad (7.1.12)$$

Sous une transformation de jauge $\mathcal{D}_\mu \psi(x)$ se transforme comme $\psi(x)$. Comme cela est vrai pour tout $\psi(x)$ on en déduit au niveau des opérateurs :

$$\mathcal{D}'_\mu = U(x)\mathcal{D}_\mu U^{-1}(x) = U(x)\mathcal{D}_\mu U^\dagger(x) \quad (7.1.13)$$

Pour éviter la manipulation d'indices de couleur on introduit les matrices 3×3 , locales hermitiennes de trace nulle :

$$\mathcal{A}_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a, \quad \tilde{\alpha}(x) = \alpha^a(x)T^a, \quad (7.1.14)$$

avec sommation implicite sur les indices de couleur. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\mu &= U(x) (\partial_\mu - ig\mathcal{A}_\mu) U^{-1}(x) \\ &= \partial_\mu + U(x)(\partial_\mu U^{-1}(x)) - igU(x)\mathcal{A}_\mu(x)U^{-1}(x). \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

\mathcal{D}'_μ est donc de la forme $\partial_\mu - ig\mathcal{A}'_\mu(x)$ avec :

$$\boxed{\mathcal{A}'_\mu(x) = \frac{i}{g}U(x)(\partial_\mu U^{-1}(x)) + U(x)\mathcal{A}_\mu(x)U^{-1}(x),} \quad (7.1.16)$$

qui pour une transformation infinitésimale s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{A}'_\mu(x) - \mathcal{A}_\mu(x) = \delta\mathcal{A}_\mu(x) = \partial_\mu \tilde{\alpha}(x) - ig[\mathcal{A}_\mu(x), \tilde{\alpha}(x)].} \quad (7.1.17)$$

Pour obtenir cette relation en terme des composantes colorées on considère $\text{Tr}(T^a \delta\mathcal{A}_\mu(x))$ qui, après usage des relations de commutation éq. (7.1.5) et de (7.1.6), mène à :

$$\boxed{\delta A_\mu^a(x) = \partial_\mu \alpha^a(x) + gf^{abc}A_\mu^b(x)\alpha^c(x).} \quad (7.1.18)$$

Sous la transformation de jauge définie par les éqs. (7.1.10) et (7.1.18) on a donc bien rétabli la propriété d'invariance du lagrangien : $\delta\mathcal{L} = 0$. La dernière équation montre que $A_\mu^a(x)$ appartient à la représentation adjointe (octet **8**) de $SU(3)$. Le deuxième terme (non abélien) de l'équation illustre la différence fondamentale entre QED et QCD car il permet, comme on le verra plus bas, le couplage des bosons de jauge entre eux ce qui conduira à la propriété de *liberté asymptotique*. Mais comme pour QED, on vérifie facilement qu'un terme de masse de type $m^2 \Sigma_a A_\mu^a A^{a\mu}$ associé aux champs $A_\mu^a(x)$ n'est pas invariant de jauge. Les gluons sont donc des champs de masse nulle, autocouplés, qui induisent des interactions à longue portée entre les quarks. Ce dernier argument est déterminant pour le choix du groupe de jauge. En effet, si $U(3)$ était le groupe d'invariance,

on aurait une interaction hadronique à longue portée qui serait singulet $\mathbf{1}$ de couleur. Ceci est contraire aux observations expérimentales : la force nucléaire forte entre les hadrons est à courte portée : $\sim 1/m_\pi$. Cet argument exclut donc le groupe $U(3)$ comme groupe de couleur et on reste avec $SU(3)$ et 8 gluons colorés de masse nulle couplant à des champs de matière colorés, les quarks.

Il est utile d'introduire les générateurs du groupe opérant sur la représentation adjointe. Ce sont des matrices 8×8 dont les éléments sont donnés par :

$$(\mathcal{T}^c)^{ab} = -if^{cab}. \quad (7.1.19)$$

Il est facile de vérifier qu'elles satisfont les relations de commutation de $SU(3)$, éq. (7.1.5) :

$$[\mathcal{T}^a, \mathcal{T}^b] = if^{abd}\mathcal{T}^d \quad (7.1.20)$$

qui sont équivalentes à

$$f^{abd}f^{cde} + f^{bcd}f^{ade} + f^{cad}f^{bde} = 0. \quad (7.1.21)$$

Cette dernière équation découle directement de l'identité de Jacobi :

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0. \quad (7.1.22)$$

On introduit maintenant la dérivée covariante opérant sur la représentation adjointe dont les éléments de matrice sont

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu)^{ab} &= \partial_\mu \delta^{ab} - ig(\mathcal{T}^c)^{ab} A_\mu^c(x) \\ &= \partial_\mu \delta^{ab} - gf^{abc} A_\mu^c(x). \end{aligned} \quad (7.1.23)$$

Il est alors facile de voir que l'éq. (7.1.18) prend la forme :

$$\delta A_\mu^a(x) = (\mathcal{D}_\mu)^{ab} \alpha^b(x), \quad (7.1.24)$$

qui met en évidence la nature non abélienne de la transformation de jauge $SU(3)$ sur un élément de la représentation adjointe. Cette formule sera utile pour la discussion sur la quantification de QCD.

• Terme cinétique pour les gluons

Mais nous n'avons pas encore fini car, comme pour QED, le terme cinétique du champ de jauge est absent et le modèle n'admet que des solutions triviales. On va donc définir le tenseur antisymétrique qui généralise le $F_{\mu\nu}$ de QED dans le cas non abélien par :

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \quad (7.1.25)$$

avec \mathcal{D}_μ donné par l'éq. (7.1.11). Ce terme a la bonne dimension en terme de masse. On montre facilement, utilisant la formule de Leibniz $\partial_\mu \mathcal{A}_\nu = (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu) + \mathcal{A}_\nu \partial_\mu$, que

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - ig[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu], \quad (7.1.26)$$

ou, en termes de composantes,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \underbrace{gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c}_{\text{terme non abélien}}. \quad (7.1.27)$$

Pour obtenir la variation du tenseur $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ sous une transformation de jauge U il est utile de se souvenir que, par l'éq. (7.1.13), $\mathcal{D}'_\mu = U\mathcal{D}_\mu U^\dagger$, ce qui est aussi le cas pour $\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu$ et par conséquent pour le tenseur d'énergie-impulsion

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = U\mathcal{F}_{\mu\nu}U^\dagger. \quad (7.1.28)$$

Pour une transformation infinitésimale $U = 1 + ig\tilde{\alpha}(x)$, cela mène à,

$$\delta\mathcal{F}_{\mu\nu} = -ig[\mathcal{F}_{\mu\nu}, \tilde{\alpha}(x)]. \quad (7.1.29)$$

Du point de vue des transformations du groupe $SU(3)$, $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ se transforme comme \mathcal{A}_μ , c'est-à-dire un élément de la représentation adjointe (eq. (7.1.17)). On définit le terme cinétique des champs de jauge comme :

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = -\frac{1}{2}\text{Tr}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \underbrace{\text{Tr}T^a T^b}_{\frac{1}{2}\delta^{ab}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu},$$

qui est évidemment un scalaire invariant de jauge, comme on le prouve aisément en utilisant l'éq. (7.1.28) et la propriété de cyclicité de la trace. Finalement, le lagrangien, au niveau classique, pour un fermion coloré s'écrit :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{Tr}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi. \quad (7.1.30)$$

The premier terme contient les couplages à trois et quatre gluons tandis que le deuxième terme contient le couplage des gluons aux fermions.

• Résumé des transformations de jauge

On rappelle les notations :

$$\begin{aligned} \psi &= (\psi_i), \quad i = 1, 2, 3, \text{ champs de quark} \\ \mathcal{A}_\mu(x) &= A_\mu^a(x)T^a, \quad a = 1, \dots, 8, \text{ champs de jauge (connexion)} \\ \mathcal{D}_\mu &= \partial_\mu - ig\mathcal{A}_\mu(x), \text{ dérivée covariante, représentation fondamentale} \\ (\mathcal{D}_\mu)^{ab} &= \partial_\mu\delta^{ab} - gf^{abc}A_\mu^c(x), \text{ dérivée covariante, représentation adjointe} \\ \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) &= F_{\mu\nu}^a(x)T^a = \partial_\mu\mathcal{A}_\nu(x) - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu(x) - ig[\mathcal{A}_\mu(x), \mathcal{A}_\nu(x)], \text{ courbure.} \\ \Leftrightarrow F_{\mu\nu}^a(x) &= \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + gf^{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x) \end{aligned} \quad (7.1.31)$$

La densité lagrangienne éq. (7.1.30), et par conséquent l'action, est invariante de jauge, c'est-à-dire invariante sous la transformation de jauge paramétrée par la variable $\tilde{\alpha} = \alpha^a(x)T^a$:

$$\begin{aligned} \delta\psi &= ig\tilde{\alpha}\psi, & \delta\bar{\psi} &= -ig\bar{\psi}\tilde{\alpha}, & \delta\mathcal{D}_\mu\psi &= ig\tilde{\alpha}(x)\mathcal{D}_\mu\psi \\ \delta\mathcal{A}_\mu &= \partial_\mu\tilde{\alpha} - ig[\mathcal{A}_\mu, \tilde{\alpha}] & \iff & \delta A_\mu^a(x) &= (\mathcal{D}_\mu)^{ab}\alpha^b(x) \\ \delta\mathcal{F}_{\mu\nu} &= -ig[\mathcal{F}_{\mu\nu}, \tilde{\alpha}] & \iff & \delta F_{\mu\nu}^a &= gf^{abc}F_{\mu\nu}^b\alpha^c(x). \end{aligned} \quad (7.1.32)$$

La forme explicite des matrices T^a n'intervient quasiment jamais. Cependant, quand c'est nécessaire, nous utiliserons les matrices de Gell-Mann : $T^a = \frac{1}{2}\lambda^a$. On donne en appendice un certain nombre de relations utiles entre les facteurs de couleur.

7.2 Quantification : théorie scalaire

On rappelle les difficultés rencontrées lors de la quantification de QED. D'une part, le fait de représenter le photon par un champ vecteur $A_\mu(x)$ qui a quatre états de polarisation alors qu'une particule de masse nulle n'en a que deux, nécessitait de s'assurer que les polarisations non physiques n'affectaient pas les prédictions. D'autre part, pour respecter les relations de commutation du photon il avait fallu briser l'invariance de jauge ce qui avait introduit dans le lagrangien, et par conséquent dans le propagateur du photon, un paramètre arbitraire qui ne devait pas affecter la prédiction des observables. On avait vu aussi le rôle primordial joué par le fait que le photon se couplait aux fermions via un courant conservé ce qui conduisait au découplage des paramètres non physiques dans la prédiction des observables. Le même phénomène est à l'oeuvre en QCD mais, dans ce cas, l'autocouplage des gluons entre eux ne filtre pas les états de polarisation non physique comme le faisait le couplage aux fermions et une procédure spéciale doit être introduite pour l'éliminer. La façon moderne de procéder est d'utiliser le formalisme d'intégrale fonctionnelle de Feynman et de suivre la procédure de Fadeev-Popov. Etant donné la subtilité de la logique et du formalisme nous allons illustrer dans un premier temps la méthode et la dérivation des règles de Feynman dans le cas d'un modèle scalaire où on ne s'embarasse pas de contraintes d'invariance de jauge. Puis nous nous tournerons, dans la section suivante, vers QCD et introduirons les fantômes de Fadeev-Popov qui permettent de d'écrire une fonctionnelle génératrice de QCD en respectant l'invariance de jauge et ensuite nous assénerons les règles de Feynman correspondantes.

• Fonctionnelle génératrice et règles de Feynman

On considère le modèle $\lambda\phi^4$ (déjà mentionné plus haut) dont la densité lagrangienne est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{m^2}{2}\phi^2(x) - \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x). \quad (7.2.33)$$

Toute quantité physique peut se calculer à partir des fonctions de Green

$$G^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\langle 0|\mathcal{T}(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n))|0\rangle}{\langle 0|0\rangle}. \quad (7.2.34)$$

On peut montrer qu'elles peuvent être obtenues à partir de la fonctionnelle génératrice

$$W[J] = \int [D\phi] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x [\mathcal{L} + \hbar J(x)\phi(x)] \right] \quad (7.2.35)$$

où $[D\phi]$ signifie que l'on intègre sur toutes les fonction $\phi(x)$ pour tous les x , et $J(x)$ est le terme de source du champ $\phi(x)$. Dans ce formalisme une fonction de Green s'écrit (sans démonstration!) :

$$G^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\int [D\phi] \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}\right]}{\int [D\phi] \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}\right]} \quad (7.2.36)$$

qui peut être obtenue par dérivation fonctionnelle par rapport au terme de source (on prend $\hbar = 1$) :

$$G^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{W[0]} \frac{\delta^n W[J]}{i\delta J(x_1) \cdots i\delta J(x_n)} \Big|_{J=0}, \quad (7.2.37)$$

où la dérivée fonctionnelle d'une expression telle que $\int d^4y \phi(y) J(y)$ est $\frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y \phi(y) J(y) = \phi(x)$. Développant dans l'éq. (7.2.35) le terme exponentiel par rapport au terme de source on trouve

$$W[J] = \int [D\phi] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) J(x_1) \cdots J(x_n) \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right], \quad (7.2.38)$$

ce qui montre que la fonctionnelle peut s'écrire

$$W[J] = W[0] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} G^n(x_1, x_2, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n), \quad (7.2.39)$$

et donc que la connaissance de toutes les fonctions de Green est équivalente à celle de la fonctionnelle génératrice.

• Développement perturbatif

Dans le cadre d'une approche perturbative on sépare la densité lagrangienne entre une partie libre $\mathcal{L}_0 = (\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^2(x))/2$ et une partie contenant l'interaction (polynomiale) $\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4(x)$. On introduit d'abord la fonctionnelle génératrice de la théorie libre qui est construite à partir de \mathcal{L}_0

$$W_0[J] = \int [D\phi] \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J(x)\phi(x))\right], \quad (7.2.40)$$

et qui permet, en particulier, d'obtenir le propagateur du champ libre par dérivation fonctionnelle de $W_0[J]$ (éq. (7.2.37)). On fait ensuite un développement de $W[J]$ en fonction du couplage λ , donc en fonction de \mathcal{L}_I ,

$$\begin{aligned} W[J] &= \int [D\phi] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\int d^4y i\mathcal{L}_I(\phi(y)) \right)^n \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J(x)\phi(x))\right] \\ &= \int [D\phi] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\int d^4y i\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right) \right)^n \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J(x)\phi(x))\right] \\ &= \int [D\phi] \exp\left[\int d^4y i\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right)\right] \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J(x)\phi(x))\right] \\ &= \exp\left[\int d^4y i\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right)\right] W_0[J]. \end{aligned} \quad (7.2.41)$$

Le passage de la première à la deuxième ligne s'explique par le fait qu'un facteur ϕ dans l'intégrand s'obtient par dérivation par rapport au terme de source. La dernière équation permet de construire la série perturbative, à n'importe quel ordre, à partir de la fonctionnelle génératrice de la théorie libre en développant l'exponentielle en fonction du couplage. Ainsi :

$$\begin{aligned} W[J] &= \exp\left(i\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right)\right) W_0[J] \\ &= \left[1 - i\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{4!}\right)^2 \left(\int d^4x \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)^4\right)^2 + \dots\right] W_0[J] \end{aligned} \quad (7.2.42)$$

Cette expression donne la base d'une représentation graphique, que l'on introduira plus bas, de la fonctionnelle génératrice et le premier terme non trivial contient la fonction de Green à 4-points à l'ordre le plus bas (couplage).

• Le propagateur

Pour obtenir le propagateur de la théorie libre on va d'abord effectuer l'intégrale fonctionnelle de $W_0[J]$, éq. (7.2.40). Pour cela on ré-écrit l'action

$$\begin{aligned} \int d^4x \mathcal{L}_0 &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\right) (\phi(x) \partial^2 \phi(x) + m^2 \phi^2(x)) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \int d^4x d^4y \phi(x) K(x, y) \phi(y) \end{aligned} \quad (7.2.43)$$

où on a effectué une intégration par partie, en ignorant le terme dérivée totale comme il est de coutume, et l'opérateur cinétique $K(x, y)$ est défini par

$$K(x, y) = \delta^{(4)}(x - y) (\square_y + m^2), \quad (7.2.44)$$

avec $\square_y = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial y_\mu}$ n'opérant que sur la variable y . La fonctionnelle $W_0[J]$ prend alors la forme

$$W_0[J] = \int [D\phi] \exp\left[\frac{-i}{2} \int d^4x d^4y [\phi(x) K(x, y) \phi(y) + iJ(x) \phi(y) \delta^4(x - y)]\right], \quad (7.2.45)$$

qui se prête à une intégration gaussienne comme on va le voir. Dans un premier temps on discrétise cette expression

$$W_0[J] = \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\phi_1 \cdots d\phi_N \exp\left[\frac{-i}{2} \sum_{i,j} \phi_i K_{ij} \phi_j + i \sum_i J_i \phi_i\right]. \quad (7.2.46)$$

S'inspirant du cas à une dimension, $N = 1$, où on effectue une translation sur $\phi \rightarrow \phi - J/K_{11}$ pour reconstruire un carré parfait, ici on introduit la combinaison $\phi'_i = \phi_i - \Delta_{ik} J_k$, Δ_{ij} est un élément d'une matrice Δ à déterminer, et on ré-écrit la fonctionnelle

$$W_0[J] = \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\phi_1 \cdots d\phi_N \exp\left[\frac{-i}{2} \sum_{i,j,k,l} (\phi_i - \Delta_{ki} J_k) K_{ij} (\phi_j - \Delta_{jl} J_l) + \frac{i}{2} \sum_{i,j,k,l} J_k \Delta_{ki} K_{ij} \Delta_{jl} J_l\right], \quad (7.2.47)$$

la matrice Δ_{ik} étant contrainte par la condition que l'on retrouve bien le terme linéaire en les sources, c'est à dire que l'on doit avoir

$$\Delta_{ki}K_{ij} = \delta_{kj}, \quad K_{ij}\Delta_{jl} = \delta_{il}. \quad (7.2.48)$$

La matrice Δ est donc simplement, l'inverse de la matrice K . La fonctionnelle génératrice peut donc s'écrire, après changement de variables

$$\begin{aligned} W_0[J] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\phi'_1 \cdots d\phi'_N \exp \left[\frac{-i}{2} \sum_{i,j} \phi'_i K_{ij} \phi'_j + \frac{i}{2} \sum_{i,j} J_i \Delta_{ij} J_j \right] \\ &= \frac{c}{\det(K)} \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left[\frac{i}{2} \sum_{i,j} J_i \Delta_{ij} J_j \right], \end{aligned} \quad (7.2.49)$$

où on a effectué l'intégrale gaussienne sur les variables ϕ' (pour obtenir ce résultat facilement on peut diagonaliser la matrice symétrique K_{ij}). Le facteur de normalisation devant cette intégrale peut être, comme d'habitude ignoré, et revenant à la limite du continu on trouve

$$\boxed{W_0[J] = \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x, y) J(y) \right]}, \quad (7.2.50)$$

où l'opérateur $\Delta(x, y)$, satisfait la version continue de l'éq. (7.2.48), c'est à dire :

$$\boxed{\int d^4z K(x, z) \Delta(z, y) = \int d^4z \Delta(x, z) K(z, y) = \delta^{(4)}(x - y)}. \quad (7.2.51)$$

On cherche la solution de cette équation en introduisant la transformée de Fourier

$$\Delta(z, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(z-y)} \Delta(k) \quad (7.2.52)$$

et on trouve facilement

$$\Delta(k) = -\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (7.2.53)$$

Pour donner un sens à ces expressions on a attribué une petite partie imaginaire négative à la masse $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$ pour respecter la causalité induite par l'opérateur \mathcal{T} (voir sec. 2.3). Le propagateur libre sera donc (voir éq. (7.2.37)) :

$$\begin{aligned} G^2(x_1, x_2) &= \frac{1}{W_0[0]} \frac{\delta^2}{i\delta J(x_1) i\delta J(x_2)} \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x, y) J(y) \right] \Big|_{J=0} \\ &= -i \Delta(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (7.2.54)$$

Dans l'espace des impulsions on trouve alors que la propagateur d'une particule scalaire libre est finalement :

$$\boxed{G(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}}. \quad (7.2.55)$$

En règle générale, la propagateur de Feynman dans l'espace des impulsions est $-i$ fois la transformée de Fourier de l'inverse de l'opérateur cinétique du Lagrangien de la théorie libre.

• **Le vertex**

On va s'attacher maintenant à expliciter le premier terme non trivial de l'éq. (7.2.42) :

$$-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right)^4 \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4y d^4z J(y) \Delta(y, z) J(z) \right], \quad (7.2.56)$$

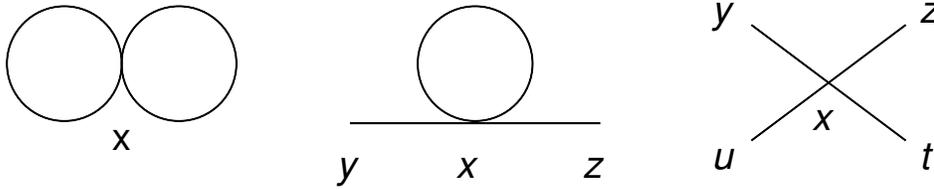
où on a utilisé la forme explicite éq. (7.2.50) de $W_0[J]$. L'application d'un opérateur $\delta/i\delta J(x)$ sur l'exponentielle engendre le terme

$$\begin{aligned} & -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right)^3 \frac{1}{2} \left[\int d^4z \Delta(x, z) J(z) + \int d^4y J(y) \Delta(y, x) \right] \\ & \qquad \qquad \qquad \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4y d^4z J(y) \Delta(y, z) J(z) \right] \\ & = -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right)^3 \left[\int d^4z \Delta(x, z) J(z) \right] \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4y d^4z J(y) \Delta(y, z) J(z) \right], \end{aligned} \quad (7.2.57)$$

puisque la fonction $\Delta(x, y)$ est symétrique en x et y (voir éqs. (7.2.52, 7.2.55)), de sorte que l'on trouve finalement

$$\begin{aligned} & -\frac{i\lambda}{4!} \left[-3 \int d^4x \Delta(x, x) \Delta(x, x) - 6 i \int d^4x \Delta(x, x) \int d^4y \Delta(x, y) J(y) \int d^4z \Delta(x, z) J(z) \right. \\ & \left. + \int d^4y \Delta(x, y) J(y) \int d^4z \Delta(x, z) J(z) \int d^4t \Delta(x, t) J(t) \int d^4u \Delta(x, u) J(u) \right] W_0[J]. \end{aligned} \quad (7.2.58)$$

On peut donner une représentation graphique de cette expression :



Le premier terme correspond à deux propagateurs qui se referment sur eux-mêmes au point x , le deuxième à la création de champs ϕ aux points y et z par les sources et à leur propagation jusqu'au point x où ils interagissent, enfin le dernier terme décrit la création de 4 champs aux points y, z, t et u et leur propagation jusqu'au point x où ils se couplent entre eux. Le terme qui nous intéresse est ce dernier terme qui est le seul qui va contribuer à la fonction de Green à 4 points. En effet, cette fonction est obtenue par application de la formule éq. (7.2.37) pour $n = 4$: il suffit pour cela d'appliquer les opérateurs $\delta/\delta J(x_i)$ sur le terme quadratique en J de l'expression ci-dessus, leur action sur $W_0[J]$ donnant 0 lorsqu'on imposera $J = 0$ à la fin du calcul. On trouvera donc

$$G^4(x_1, x_2, x_3, x_4) = -i\lambda \int d^4x \Delta(x, x_1) \Delta(x, x_2) \Delta(x, x_3) \Delta(x, x_4) \quad (7.2.59)$$

où le facteur $1/4!$ d'origine est compensé du fait que chaque opérateur de dérivation $\delta/\delta J(x_i)$ agit sur chacun des facteurs de type $\int d^4y \Delta(x, y) J(y)$ soit, en tout, $4!$ possibilités. Introduisant les propagateurs dans l'espace des impulsions par l'éq. (7.2.52) et effectuant l'intégrale sur x , on trouve

$$G^4(x_1, x_2, x_3, x_4) = -i\lambda \int \prod_1^4 \left(\frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4} i \frac{e^{ip_j x_j}}{p_j^2 - m^2 + i\epsilon} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \quad (7.2.60)$$

ce qui permet d'écrire la fonction à 4 points dans l'espace des impulsions (transformée de Fourier de $G^4(x_i)$) :

$$\tilde{G}^4(p_1, p_2, p_3, p_4) = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \prod_1^4 \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (7.2.61)$$

où l'on a bien prouvé la conservation d'impulsion au point d'interaction des champs. Le vertex au sens de diagramme de Feynman est, par définition, obtenu par amputation des propagateurs des particules externes et suppression de la contrainte de conservation de l'impulsion ce qui donne vertex = $-i\lambda$.

• Les règles Feynman en $\lambda\phi^4$

Normalement on devrait montrer ici comment retrouver le théorème de Wick, engendrer les diagrammes de Feynman à n'importe quel ordre de la théorie des perturbations ainsi qu'inclure une discussion sur les génératrices fonctionnelles des fonctions de Green connexes et irréductibles à une particule mais nous ne le ferons pas pour rester dans l'esprit utilitaire et appliqué de ces notes. Nous nous bornerons à rappeler les règles de Feynman qui permettent de calculer un élément de matrice dans l'espace des impulsions :

- pour chaque vertex : $-i\lambda$
- pour chaque propagateur d'impulsion p : $i/(p^2 - m^2 + i\epsilon)$
- pour chaque boucle interne d'impulsion p : $\int d^4 p / (2\pi)^4$.

7.3 Quantification : chromodynamique quantique

Nous revenons maintenant à QCD et nous nous tournons vers les difficultés causées par la contrainte d'invariance de jauge.

• Fixage de la jauge

On ne considère dans un premier temps que le terme de jauge dans la densité lagrangienne, $\mathcal{L}_G = -F_{\mu\nu}^a(x) F^{\mu\nu a}(x)/4$, et la fonctionnelle génératrice sans le terme de source (et on prend de plus $\hbar = 1$) :

$$W_G[0] = \int [DA] \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_G \right]. \quad (7.3.62)$$

La mesure d'intégration invariante est de la forme $[DA] = \Pi_{a,x,\mu} dA_\mu^a(x)$ où l'on doit sommer sur toutes les fonctions $A_\mu^a(x)$ y compris leurs transformées sous l'action des éléments $g = g(\alpha^a(x))$ du groupe de jauge. Le terme \mathcal{L}_G étant invariant sous une transformation de jauge, on voit aisément

que $W[0]$ n'est pas définie puisque l'intégrale $\int [Dg] = \int \Pi_a d\alpha^a(x)$ est infinie (groupe non-compact). Pour donner un sens à l'expression on va fixer la jauge par une contrainte de type

$$G^\mu A_\mu^{a,g}(x) - B^a(x) = 0, \quad \forall a = 1, \dots, 8 \quad (7.3.63)$$

supposée définir une configuration de jauge unique. Différents choix sont possibles pour G^μ correspondants à différents choix de jauge. Par exemple,

$$\begin{aligned} G_\mu &= \partial_\mu, \text{ jauge covariante (Lorentz)} \\ G^\mu &= n^\mu, \text{ vecteur constant de genre espace, jauge axiale} \\ G^\mu &= (0, \vec{\nabla}), \text{ jauge de Coulomb.} \end{aligned} \quad (7.3.64)$$

On introduit la fonctionnelle $\Delta_G[A_\mu]$ par

$$\Delta_G[A_\mu] \int [Dg] \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^{a,g} - B^a) = 1 \quad (7.3.65)$$

avec $[Dg] = \Pi_a d\alpha^a(x)$ la mesure d'intégration invariante du groupe de jauge et $A_\mu^{a,g}$ le champ pour le choix de l'élément du groupe de jauge g . $\Delta_G[A_\mu]$ est invariant sous transformation de jauge. En effet :

$$\begin{aligned} \Delta_G^{-1}[A_\mu^{g'}] &= \int [Dg] \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^{a,gg'} - B^a) \\ &= \int [Dgg'] \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^{a,gg'} - B^a) \\ &= \int [Dg] \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^{a,g} - B^a) \\ &= \Delta_G^{-1}[A_\mu] \end{aligned} \quad (7.3.66)$$

On ré-écrit la fonctionnelle génératrice éq. (7.3.62) en injectant l'éq. (7.3.65) :

$$W_G[0] = \int [DA] \int [Dg] \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^{a,g} - B^a) \Delta_G[A_\mu] \exp i \left[\int d^4x \mathcal{L}_G \right]. \quad (7.3.67)$$

L'idée est de n'intégrer que sur une seule copie des champs de jauge et non sur toutes les configurations obtenues à partir de cette copie par application des éléments $g(\alpha^a(x))$ du groupe. Profitant de ce que tous les termes dans l'éq. ci-dessus sont invariants, sauf les champs $A_\mu^{a,g}$ dans les fonctions δ , sous une transformation de jauge, on peut écrire :

$$W_G[0] = \int [DA] \int [Dg] \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^{a,g} - B^a) \Delta_G[A_\mu^g] \exp i \left[\int d^4x \mathcal{L}_G \right], \quad (7.3.68)$$

faire le changement de notation $A_\mu^{a,g} \rightarrow A_\mu^a$ et factoriser l'intégrale sur les configurations de jauge $\int [Dg]$ puisque les autres facteurs n'en dépendent plus,

$$W_G[0] = \left(\int [Dg] \right) \int [DA] \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^a - B^a) \Delta_G[A_\mu] \exp i \left[\int d^4x \mathcal{L}_G \right]. \quad (7.3.69)$$

Le facteur $\int [Dg]$ apparaît comme une constante multiplicative infinie qui s'élimine quand on considère les rapports comme en éq. (7.2.36). On peut donc l'ignorer. On cherche maintenant une expression pour $\Delta_G^{-1}[A_\mu]$, le déterminant de Fadeev-Popov. L'éq. (7.3.65) s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta_G^{-1}[A_\mu] &= \int \Pi_b d\alpha^b(y) \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^{a,g}(x) - B^a) \\ &= 1/\det \left(\frac{\delta(G^\mu A_\mu^a(x))}{\delta\alpha^b(y)} \right) \\ &\equiv \frac{1}{\det(M_G^{ab}(x, y))}.\end{aligned}\tag{7.3.70}$$

où le symbole g dans $A_\mu^{a,g}(x)$ est un élément du groupe de jauge paramétré par les $\alpha^b(y)$. Le déterminant apparaît car, comme pour l'intégration ordinaire, quand on effectue l'intégrale sur une variable, α^b par exemple, à l'aide de la fonction $\delta(G^\mu A_\mu^{a,g}(x) - B^a)$ on introduit une dépendance implicite de cette variable sur les autres dont il faut tenir compte dans les intégrations successives. La fonctionnelle génératrice avec source va pouvoir s'écrire maintenant

$$W_G[J] = \int [DA] \det(M_G^{ab}) \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^a - B^a) \exp i \int d^4x [\mathcal{L}_G + J^{\alpha\mu} A_\mu^a].\tag{7.3.71}$$

Puisque la fonction $B^a(x)$ est arbitraire, on va intégrer sur les $B^a(x)$ avec un poids gaussien²

$$\int [DB] \Pi_b \exp\left[\frac{-i}{2\xi} \int d^4x (B^b(x))^2\right] \Pi_a \delta(G^\mu A_\mu^a - B^a) = \Pi_a \exp\left[\frac{-i}{2\xi} \int d^4x (G^\mu A_\mu^a)^2\right]\tag{7.3.72}$$

de sorte que l'on peut écrire

$$W_G[J] = \int [DA] \det(M_G^{ab}) \exp i \int d^4x [\mathcal{L}_G - (G^\mu A_\mu^a)^2/2\xi + J^{\alpha\mu} A_\mu^a].\tag{7.3.73}$$

$W_G[J]$ serait une fonctionnelle génératrice au sens habituel s'il n'y avait pas le déterminant de Fadeev-Popov M_G^{ab} dans l'intégrand. On va voir qu'on peut ré-écrire ce terme sous la forme d'une intégrale fonctionnelle de façon à exprimer $W_G[J]$ sous une forme standard mais au prix de l'introduction de champs scalaires χ^a et χ^{*a} anti-commutants (variables de Grassmann), les fantômes de Fadeev-Popov. On a la relation :

$$\det(M_G^{ab}(x, y)) = \int \Pi_{a,b} d\chi^{*a}(x) d\chi^b(y) \exp[-i \int d^4x d^4y \chi^{*a}(x) M_G^{ab}(x, y) \chi^b(y)],\tag{7.3.74}$$

que l'on va discuter maintenant. Ce terme a bien la structure d'une fonctionnelle génératrice des champs χ^a et χ^{*a} .

• Digression sur les variables de Grassmann

On introduit des c-nombres χ_j , qui anti-commutent

$$\{\chi_i, \chi_j\} = 0,\tag{7.3.75}$$

2. Le terme qui "fixe" la jauge par la contrainte $(G^\mu A_\mu^a - B^a) = 0$, $B^a(x)$ arbitraire, est l'équivalent du terme qui "casse" l'invariance de jauge du lagrangien (éq. 2.4.49) dans la quantification canonique de QED avec $1/\xi = \lambda$.

ainsi toute expression de la forme $E = \chi_{i_1} \chi_{i_2} \cdots \chi_{i_k}$ est nulle si elle contient deux χ_{i_l} identiques, et toute fonction d'une seule variable de Grassmann est nécessairement de la forme

$$E(\chi) = e_o + e_1 \chi, \quad (7.3.76)$$

puisque $\chi^2 = 0$. On définit la dérivée à gauche de E par

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \chi_i} (\chi_{i_1} \chi_{i_2} \cdots \chi_{i_l} \cdots \chi_{i_k}) &= (-1)^{l-1} (\chi_{i_1} \chi_{i_2} \cdots \chi_{i_k}), \text{ si } i = i_l \\ &= 0, \text{ si } i \neq i_l, \forall l. \end{aligned} \quad (7.3.77)$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \chi_i \partial \chi_j} = -\frac{\partial^2 E}{\partial \chi_j \partial \chi_i}, \quad (7.3.78)$$

et par conséquent,

$$\frac{\partial^2 E}{(\partial \chi_i)^2} = 0. \quad (7.3.79)$$

On introduit l'intégration sur les variables de Grassmann par les règles

$$\int d\chi_i = 0 \text{ et } \int d\chi_i \chi_j = -\int \chi_j d\chi_i = \delta_{ij}, \quad (7.3.80)$$

où les éléments d'intégration $d\chi_i$ sont également des variables de Grassmann satisfaisant les relations éq. (7.3.75). La première définition permet de préserver la propriété d'invariance de l'intégrale sous un changement de variable $\chi \rightarrow \chi + a$. On peut citer quelques propriétés amusantes et utiles, comme par exemple l'identité suivante

$$\int d\chi f(\chi) = \frac{\partial}{\partial \chi} f(\chi). \quad (7.3.81)$$

On note χ^* la variable complexe conjuguée de χ et on considère χ^* et χ sont comme deux variables indépendantes.

Pour "prouver" la relation éq. (7.3.74), c'est à dire l'exponentiation du déterminant de Fadeev-Popov, on discrétise le problème et on définit l'intégrale :

$$I = \int d\chi_1^* \cdots d\chi_N^* d\chi_1 \cdots d\chi_N \exp\left(\sum_{i,j} \chi_i^* A^{ij} \chi_j\right), \quad (7.3.82)$$

où (A^{ij}) est une matrice $N \times N$ de nombres complexes. On somme sur les indices i, j dans l'équation. Développant l'exponentielle on voit que seul le terme d'ordre N , $(\chi_i^* A^{ij} \chi_j)^N / N!$, survit car d'après les définitions éq. (7.3.80) il faut une et seulement une variable de chaque type pour que l'intégrale ne soit pas nulle. Collectant tous les χ_i^* à gauche et les χ_j à droite, on trouve

$$\begin{aligned} (\chi_i^* A^{ij} \chi_j)^N &= (-1)^{N(N-1)/2} \sum_{i_1 \cdots, j_1 \cdots} A^{i_1 j_1} \cdots A^{i_N j_N} \chi_{i_1}^* \cdots \chi_{i_N}^* \chi_{j_1} \cdots \chi_{j_N} \\ &= (-1)^{N(N-1)/2} \sum_{i_1 \cdots, j_1 \cdots} \varepsilon_{i_1 \cdots i_N} \varepsilon_{j_1 \cdots j_N} A^{i_1 j_1} \cdots A^{i_N j_N} \chi_1^* \cdots \chi_N^* \chi_1 \cdots \chi_N \\ &= (-1)^{N(N-1)/2} N! \sum_{i_1 \cdots, j_1 \cdots} \varepsilon_{j_1 \cdots j_N} A^{i_1 j_1} \cdots A^{i_N j_N} \chi_1^* \cdots \chi_N^* \chi_1 \cdots \chi_N. \end{aligned} \quad (7.3.83)$$

Les tenseurs totalement antisymétriques de type $\varepsilon_{i_1 \dots i_N}$ apparaissent quand on anticommute les χ_i^* et χ_j pour les ordonner de 1 à N . Pour comprendre le dernière ligne, il faut se rappeler que l'on $N!$ permutations de i_i avec la combinaison par exemple de termes tels que $\varepsilon_{12 \dots i_N} [A^{1j_1} A^{2j_2} \dots A^{i_N j_N} - A^{2j_1} A^{1j_2} \dots A^{i_N j_N}] \varepsilon_{j_1 \dots j_N} = 2\varepsilon_{12 \dots i_N} A^{1j_1} A^{2j_2} \dots A^{i_N j_N} \varepsilon_{j_1 \dots j_N}$ après permutation des indices j_1 et j_2 et changement de signe dans le deuxième terme. Dans la dernière ligne on reconnaît bien, à un signe près, le déterminant de la matrice (A_{ij}) puisque :

$$\det(A_{ij}) = \varepsilon_{j_1 \dots j_N} A^{1j_1} \dots A^{Nj_N}. \quad (7.3.84)$$

D'autre part, comme le facteur $N!$ dans l'équation compense un terme identique dans le développement de l'exponentielle $\exp(\chi_i^* A^{ij} \chi_j)$ on a finalement "démontré" l'éq. (7.3.74).

On peut remarquer, en passant, que l'introduction des variables de Grassmann est nécessaire pour pouvoir "exponentier" le déterminant de Fadeev-Popov. En effet, si on avait utilisé des variables commutantes ϕ_a dans l'équation (7.3.74) le résultat aurait été

$$\int \Pi_{a,b} d\phi^{*a} d\phi^b \exp[-i\phi^{*a} M_G^{ab} \phi^b] \sim \frac{1}{\det(M_G^{ab})}, \quad (7.3.85)$$

résultat que l'on a déjà rencontré en éq. (7.2.49).

• **Fonctionnelle génératrice des fantômes et forme de (M_G^{ab})**

L'exponentiation du déterminant de Fadeev-Popov, éq. (7.3.74), conduit donc une nouvelle contribution à la fonctionnelle génératrice de la théorie :

$$W[\zeta, \zeta^*] = \int [D\chi][D\chi^*] \exp[-i \int d^4x d^4y \chi^{*a}(x) M_G^{ab}(x, y) \chi^b(y) + i \int d^4x (\chi^{*a}(x) \zeta^a(x) + \zeta^{*a}(x) \chi^a(x))], \quad (7.3.86)$$

avec ζ^a et ζ^{*a} les sources respectivement des champs χ^{*a} et χ^a . On rappelle que la matrice (M_G^{ab}) introduite en éq. (7.3.70) décrit la variation de la quantité $G^\mu A_\mu^a(x)$ sous un changement des paramètres du groupe de jauge.

Pour une *jauge covariante* :

$$\begin{aligned} M_G^{ab}(x, y) &= \frac{\delta \partial^\mu A_\mu^a(x)}{\delta \alpha^b(y)} = \frac{\partial^\mu \delta A_\mu^a(x)}{\delta \alpha^b(y)} \\ &= \frac{\partial^\mu (\mathcal{D}_\mu)^{ac} \alpha^c(x)}{\delta \alpha^b(y)} = \delta^{(4)}(x - y) \partial^\mu (\mathcal{D}_\mu)^{ab}, \end{aligned} \quad (7.3.87)$$

où on a utilisé une des équations (7.1.32) avec $(\mathcal{D}_\mu)^{ac}$ la dérivée covariante dans la représentation adjointe.

Pour une *jauge axiale* :

$$\begin{aligned} M_G^{ab}(x, y) &= \frac{\delta n^\mu A_\mu^a(x)}{\delta \alpha^b(y)} = \delta^{(4)}(x - y) n^\mu (\mathcal{D}_\mu)^{ab} \\ &= \delta^{(4)}(x - y) (\delta^{ab} n \cdot \partial - g f^{abc} n \cdot A^c(x)). \end{aligned} \quad (7.3.88)$$

L'éq. (7.3.86) devient donc en jauge covariante :

$$W[\zeta, \zeta^*] = \int [D\chi][D\chi^*] \exp[i \int d^4x (-\chi^{*a}(x) \partial^\mu (\mathcal{D}_\mu)^{ab} \chi^b(x) + \chi^{*a}(x) \zeta^a(x) + \zeta^{*a}(x) \chi^a(x))], \quad (7.3.89)$$

avec une modification évidente pour le choix d'une jauge axiale.

• Le lagrangien et la fonctionnelle génératrice de QCD

Revenant à l'éq. (7.2.35) et rassemblant toutes les pièces du puzzle (contribution des gluons et des fermions, fixage de la jauge, exponentiation du déterminant de Fadeev-Popov) on arrive à la génératrice fonctionnelle de QCD pour une saveur de quark ψ :

$$W[J, \eta, \bar{\eta}, \zeta, \zeta^*] = \int [DA][D\psi][D\bar{\psi}][D\chi][D\chi^*] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x [\mathcal{L}_{QCD} + \hbar(J^{a\mu} A_\mu^a + \bar{\eta}\psi + \eta\bar{\psi} + \chi^*\zeta + \zeta^*\chi)] \right] \quad (7.3.90)$$

où η et $\bar{\eta}$ sont les sources des anti-fermions et des fermions respectivement, ζ et ζ^* sont celles des fantômes. \mathcal{L}_{QCD} est le lagrangien complet de QCD que l'on décompose en

$$\boxed{\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_F} \quad (7.3.91)$$

avec respectivement le terme cinétique des gluons,

$$\boxed{\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2} \text{Tr} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} [\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c] [\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + g f^{ade} A^{d\mu} A^{e\nu}]} \quad (7.3.92)$$

le terme de fixage de jauge (covariante),

$$\boxed{\mathcal{L}_{GF} = \frac{-1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2}, \quad (7.3.93)$$

le terme cinétique des fantômes de Fadeev-Popov (*jauge covariante*),

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}_{FP} &= -\chi^{*a} \partial^\mu (\mathcal{D}_\mu^{ab} \chi^b) = (\partial^\mu \chi^{*a}) \mathcal{D}_\mu^{ab} \chi^b \\ &= (\partial^\mu \chi^{*a}) (\delta^{ab} \partial_\mu - g f^{abc} A_\mu^c) \chi^b, \end{aligned}} \quad (7.3.94)$$

le terme cinétique du quark (fermion),

$$\boxed{\mathcal{L}_F = \bar{\psi} (i \mathcal{D} - m) \psi = \bar{\psi} \left(i(\partial_\mu - ig A_\mu^b T^b) \gamma^\mu - m \right) \psi.} \quad (7.3.95)$$

On note que les première et deuxième égalités de l'éq. (7.3.94) diffèrent par une dérivée totale que l'on néglige, comme d'habitude, car elle donne une contribution nulle à l'intégrale $\int d^4x \mathcal{L}_{FP}$ en supposant les champs suffisamment convergents à l'infini.

Une rapide inspection des différents termes du lagrangien montre qu'il existe un couplage dérivatif à 3 gluons et un couplage à 4 gluons dans \mathcal{L}_G , un couplage fantôme-fantôme-gluon dans \mathcal{L}_{FP} . Ces

termes d'interaction entre bosons de jauge sont nouveaux par rapport à QED et sont la conséquence de la structure non abélienne du groupe de jauge. En revanche, les couplages des gluons aux fermions sont similaires (à une matrice de couleur près) à ceux du photon aux fermions chargés en QED. Mais comme prévu les fantômes ne sont pas couplés aux fermions.

Si on travaille en *jauge axiale* les termes \mathcal{L}_{GF} et \mathcal{L}_{FP} sont différents et on a : le terme de fixage de jauge (axiale),

$$\boxed{\mathcal{L}_{GF} = \frac{-1}{2\xi} (n^\mu A_\mu^a)^2}, \quad (7.3.96)$$

le terme cinétique des fantômes de Fadeev-Popov (*jauge axiale*),

$$\boxed{\mathcal{L}_{FP} = -\chi^{*a} (n^\mu \mathcal{D}_\mu)^{ab} \chi^b = -\chi^{*a} (n \cdot \partial - g f^{abc} n \cdot A^c) \chi^b}. \quad (7.3.97)$$

Le choix $n \cdot A^c = 0$ permet d'annuler l'interaction entre les gluons et les fantômes ce qui conduit alors, pour ce choix de jauge, à ignorer les fantômes puisqu'ils ne couplent à aucun degré de liberté physique³.

7.4 Règles de Feynman en QCD

Pour dériver les règles de Feynman à partir de la fonctionnelle génératrice $W[J, \eta, \bar{\eta}, \zeta, \zeta^*]$, éqs. (7.3.90) et (7.3.91) on procède en deux temps, comme pour le modèle $\lambda\phi^4$: on considère d'abord $W_0[J, \eta, \bar{\eta}, \zeta, \zeta^*]$ obtenu en prenant le couplage nul dans la densité lagrangienne et on construit les fonctions à deux points, éq. (7.2.37), en dérivant par rapport aux sources : cela permet d'obtenir le propagateur libre des gluons, fantômes et fermions. Puis on dérivera les couplages de QCD via une équation de type (7.2.42). Dans toute la discussion, la génératrice fonctionnelle libre joue un rôle crucial : on utilisera la forme où l'intégration sur les champs a été effectuée selon la dérivation menant à l'éq. (7.2.50) et il est facile de voir que cette génératrice peut s'écrire sous une forme factorisée :

$$W_0[J, \eta, \bar{\eta}, \zeta, \zeta^*] = W_0[J] W_0[\zeta, \zeta^*] W_0[\eta, \bar{\eta}]. \quad (7.4.98)$$

• Les propagateurs

Gluons

Considérant maintenant chacune des composantes de $W_0[J, \eta, \bar{\eta}, \zeta, \zeta^*]$ de la génératrice fonctionnelle libre de QCD, on a pour les termes gluoniques et celui de fixage de jauge (il est nécessaire de considérer seulement la partie de la génératrice qui dépend des sources de gluons) :

$$W_0[J] = \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^{a\mu}(x) \mathcal{P}_{\mu\nu}^{ab}(x, y) J^{b\nu}(y) \right]. \quad (7.4.99)$$

3. On remarque, qu'en jauge covariante, la condition $\partial^\mu A_\mu^c = 0$ n'implique pas le découplage des gluons. En effet, quelque soit la forme de l'éq. (7.3.94), il y a bien un couplage dérivatif du gluon aux fantômes : pour la première forme on a $\chi^{*a} (\delta^{ab} \square \chi^b - g f^{abc} A_\mu^c \partial^\mu \chi^b)$, tandis que pour la deuxième on trouve $(\partial^\mu \chi^{*a}) (\delta^{ab} \partial_\mu \chi^b - g f^{abc} A_\mu^c \chi^b)$.

Pour obtenir cette expression on a effectué l'intégrale fonctionnelle sur les champs suivant la discussion précédent l'éq. (7.2.50) et la fonction $\mathcal{P}_{\mu\nu}^{ab}(x, y)$ satisfait (voir éq. (7.2.51)) :

$$\int d^4z \mathcal{D}^{ac\mu\nu}(x, z) \mathcal{P}_{\mu\nu}^{cb}(z, y) = \delta^{ab} \delta^4(x - y), \quad (7.4.100)$$

avec l'opérateur $\mathcal{D}^{cb\mu\nu}(z, y)$, jouant le rôle de l'opérateur $K(z, y)$ dans le terme cinétique des gluons. Il est extrait des éqs. (7.3.92) et (7.3.93) pour trouver :

$$\mathcal{D}^{cb\mu\nu}(z, y) = \delta^{cb} \delta^4(z - y) (-g^{\mu\nu} \square_y + (1 - \frac{1}{\xi}) \partial_y^\mu \partial_y^\nu). \quad (7.4.101)$$

Cette forme est obtenue en faisant une intégration par partie dans \mathcal{L}_G et \mathcal{L}_{GF} et négligeant le terme dérivée totale. Pour résoudre l'éq. (7.4.100), on introduit la transformée de Fourier :

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}^{ac}(x, z) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-z)} \mathcal{P}_{\mu\nu}^{ac}(k) \quad (7.4.102)$$

dans l'équation éq. (7.4.100) et on trouve après quelques manipulations simples :

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \frac{g_{\mu\nu} - (1 - \xi) k_\mu k_\nu / k^2}{k^2 + i\epsilon}. \quad (7.4.103)$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour obtenir le propagateur du gluon dans l'espace des coordonnées (voir éq. (7.2.37)) :

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{ab}(x_1, x_2) &= \frac{\delta^2}{i\delta J^{a\mu}(x_1) i\delta J^{b\nu}(x_2)} \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^{\rho\sigma}(x) \mathcal{P}_{\rho\sigma}^{cd}(x, y) J^{d\sigma}(y) \right] \\ &= -i \mathcal{P}_{\mu\nu}^{ab}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (7.4.104)$$

Dans l'espace des impulsions le propagateur du gluon est finalement, en *jauge covariante* :

$$\boxed{G_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i \mathcal{P}_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} (g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) = \delta^{ab} G_{\mu\nu}(k)}. \quad (7.4.105)$$

On mentionne également la forme du propagateur du gluon en *jauge axiale* dans la limite $\xi \rightarrow 0$ (voir éq. (2.5.72)) :

$$\boxed{G_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k \cdot n} + n^2 \frac{k_\mu k_\nu}{(k \cdot n)^2})}. \quad (7.4.106)$$

On vérifie bien les contraintes suivantes :

$$n^\mu G_{\mu\nu}^{ab}(k) = n^\nu G_{\mu\nu}^{ab}(k) = 0. \quad (7.4.107)$$

Fantômes

Pour dériver le propagateur des fantômes en *jauge covariante*, on part de

$$\int d^4x \mathcal{L}_{0_{FP}} = - \int d^4x d^4y \delta^4(x - y) \chi^{*a}(x) \delta^{ab} \delta_y^2 \chi^b(y), \quad (7.4.108)$$

d'après l'éq. (7.3.94) ce qui permet d'écrire la génératrice libre (seule la partie de la génératrice fonctionnelle dépendant des sources ζ^{*a}, ζ^b est à prendre en compte)

$$W_0[\zeta, \zeta^*] = \exp\left[i \int d^4x d^4y \zeta^{*a}(x) \mathcal{P}^{ab}(x, y) \zeta^b(y)\right] \quad (7.4.109)$$

où les ζ^{*a}, ζ^b sont les termes de source et $\mathcal{P}^{ab}(x, y)$ est l'inverse de l'opérateur $\delta^4(x - y) \delta^{ab} \delta_y^2$ au sens de l'équation (7.2.51). On trouve facilement sa transformée de Fourier

$$\mathcal{P}^{ab}(k) = -\delta^{ab} \frac{1}{k^2 + i\epsilon}. \quad (7.4.110)$$

Le propagateur du fantôme dans l'espace des coordonnées est

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{ab}(x_1, x_2) &= \left[\frac{\delta}{i\delta\zeta^{*a}(x_1)} \left(\frac{\delta}{-i\delta\zeta^b(x_2)} \right) W_{0_{FP}}[\zeta, \zeta^*] \right]_{\zeta, \zeta^*=0} \\ &= i\mathcal{P}^{ab}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (7.4.111)$$

On rappelle le signe négatif associé à l'opérateur $\delta/\delta\zeta_b(y)$ dans l'équation ci-dessus du fait qu'il faut anti-commuter cet opérateur avec le champ χ^* dans la génératrice fonctionnelle (eq. (7.3.90)) pour construire le propagateur $\langle \mathcal{T}\chi(x)\chi^*(y) \rangle$. Dans l'espace des impulsions le propagateur est donc :

$$\boxed{\mathcal{G}^{ab}(k) = -\delta^{ab} \frac{i}{k^2 + i\epsilon}.} \quad (7.4.112)$$

On remarque que le signe du propagateur du fantôme est l'opposé de celui d'un champ scalaire usuel (comparer l'équation avec (7.2.55)) : ceci est la conséquence du fait que les fantômes de Fadeev-Popov sont des scalaires, de masse nulle qui, comme les fermions obéissent à des relations d'anti-commutation.

En *jauge axiale* avec la condition $n \cdot A^c = 0$ la forme du propagateur est différente mais on verra plus bas qu'il n'y a, dans ce cas pas lieu d'introduire les champs de fantômes.

Fermions

Un raisonnement similaire permet d'obtenir, à partir de $W_0[\eta, \bar{\eta}]$ et de l'éq. (7.3.95) le propagateur du fermion

$$\boxed{S^{ij}(p) = \delta^{ij} \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon},} \quad (7.4.113)$$

avec la définition

$$-iS^{ij}(x_1, x_2) = \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}^i(x_1)} \left(\frac{\delta}{-i\delta\eta^j(x_2)} \right) \exp\left[i \int d^4x d^4y \bar{\eta}^k(x) \mathcal{P}^{kl}(x, y) \eta^l(y)\right]_{\eta, \bar{\eta}=0}, \quad (7.4.114)$$

où i, j sont les indices de couleur du fermion.

• **Les vertex**

Gluons

Les termes d'interaction dans le lagrangien \mathcal{L}_G éq. (7.3.92) s'écrivent :

$$\mathcal{L}_{G_I} = -\frac{g}{2} f^{a'b'c'} [\partial^{\mu'} A^{a'\nu'} - \partial^{\nu'} A^{a'\mu'}] A_{\mu'}^{b'} A_{\nu'}^{c'} - \frac{g^2}{4} f^{a'b'c'} f^{a'd'e'} A_{\mu'}^{b'} A_{\nu'}^{c'} A^{d'\mu'} A^{e'\nu'} \quad (7.4.115)$$

D'après l'éq. (7.2.42), la partie de la génératrice fonctionnelle qui nous intéresse pour dériver les auto-couplages du gluon est celle proportionnelle à \mathcal{L}_{G_I} dans laquelle les champs sont remplacés par les opérateurs $\frac{\delta}{i\delta J}$. Ces opérateurs agissent sur la génératrice fonctionnelle libre calculée en éq. (7.4.99). On devra donc calculer :

$$W[J]_{G+GF} = \left[-i\frac{g}{2} \int dx f^{a'b'c'} [\partial^{\mu'} \frac{\delta}{i\delta J_{\nu'}^{a'}} - \partial^{\nu'} \frac{\delta}{i\delta J_{\mu'}^{a'}}] \frac{\delta}{i\delta J^{b'\mu'}} \frac{\delta}{i\delta J^{c'\nu'}} \right. \\ \left. -i\frac{g^2}{4} \int dx f^{a'b'c'} f^{a'd'e'} \frac{\delta}{i\delta J_{\mu'}^{b'}} \frac{\delta}{i\delta J_{\nu'}^{c'}} \frac{\delta}{i\delta J^{d'\mu'}} \frac{\delta}{i\delta J^{e'\nu'}} \right] \exp \frac{i}{2} \int dy dz J^{g\rho}(y) \mathcal{P}_{\rho\sigma}^{gh}(y, z) J^{h\sigma}(z), \quad (7.4.116)$$

où toutes les sources dans les opérateurs $\frac{\delta}{i\delta J_{\nu'}^{a'}} , \dots$, sont évaluées au point $x, \frac{\delta}{i\delta J_{\nu'}^{a'}(x)}$ et on écrit dx au lieu de d^4x . On veut construire la fonction à 3-points qui est donnée par

$$G_{\mu\nu\rho}^{abc}(x_1, x_2, x_3) = \left[\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}(x_1)} \frac{\delta}{i\delta J^{b\nu}(x_2)} \frac{\delta}{i\delta J^{c\rho}(x_3)} W[J]_{G+GF} \right]_{\forall J=0}, \quad (7.4.117)$$

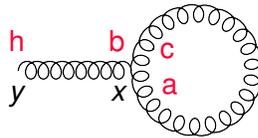
ainsi que celle à 4-points $G_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ qui est donnée par une expression similaire. Seuls contribueront les termes cubiques en les sources J dans l'équation (7.4.116) pour la fonction à 3-points et les termes quartiques en les sources pour la fonction à 4-points. Evaluant l'éq. (7.4.116) ces termes sont :

$$\left[-i\frac{g}{2} f^{a'b'c'} \int dx dz_1 dz_2 dz_3 [\partial^{\mu'} \mathcal{P}^{a'h_1\nu'\sigma_1}(x, z_1) - \partial^{\nu'} \mathcal{P}^{a'h_1\mu'\sigma_1}(x, z_1)] \mathcal{P}_{\mu'\sigma_2}^{b'h_2}(x, z_2) \mathcal{P}_{\nu'\sigma_3}^{c'h_3}(x, z_3) \right. \\ \left. J_{\sigma_1}^{h_1}(z_1) J^{h_2\sigma_2}(z_2) J^{h_3\sigma_3}(z_3) \right. \\ \left. -i\frac{g^2}{4} f^{a'b'c'} f^{a'd'e'} \int dx dz_1 dz_2 dz_3 dz_4 \mathcal{P}_{\mu'\sigma_1}^{b'h_1}(x, z_1) \mathcal{P}_{\mu'\sigma_2}^{c'h_2}(x, z_2) \mathcal{P}_{\nu'\sigma_3}^{d'h_3}(x, z_3) \mathcal{P}_{\nu'\sigma_4}^{e'h_4}(x, z_4) \right. \\ \left. J^{h_1\sigma_1}(z_1) J^{h_2\sigma_2}(z_2) J^{h_3\sigma_3}(z_3) J^{h_4\sigma_4}(z_4) \right] \exp \frac{i}{2} \int dy dz J^{g\rho}(y) \mathcal{P}_{\rho\sigma}^{gh}(y, z) J^{h\sigma}(z) \quad (7.4.118)$$

Il existe d'autres termes dans $W[J]_{G+GF}$, par exemple,

$$-i\frac{g}{2} f^{abc} \int dx dy \partial^\mu \mathcal{P}_\nu^{ca\nu}(x, x) \mathcal{P}_{\mu\sigma}^{bh}(x, y) J^{h\sigma}(y) \quad (7.4.119)$$

que l'on peut représenter graphiquement par un diagramme de "tadpole" (tétard) comme indiqué sur la figure.



Ce diagramme est nul puisque l'on contracte le tenseur f^{abc} avec un propagateur symétrique en les indices de couleur \mathcal{P}^{ca} : un gluon coloré ne peut s'annihiler en un état qui a les nombres quantiques du vide puisque la symétrie de couleur est exacte. Quant au terme en g^2 il contient deux autres facteurs, un sans source et l'autre proportionnel au produit de deux sources : ils ne sont pas nuls et ont la même interprétation que des termes similaires dans le modèle $\lambda\phi^4$ (voir la discussion de l'éq. (7.2.58)).

Appliquant l'éq. (7.4.117) à l'éq. (7.4.118), seul contribuera le terme en $-ig/2$ à la fonction à trois pattes. L'action de la dérivée par rapport aux trois sources donne le résultat suivant

$$\begin{aligned} \frac{g}{2} f^{a'b'c'} \int dx \left\{ [\partial^{\mu'} \mathcal{P}^{a' a \nu' \mu}(x, x_1) - \partial^{\nu'} \mathcal{P}^{a' a \mu' \nu}(x, x_1)] [\mathcal{P}_{\nu' \rho}^{c' b}(x, x_2) \mathcal{P}_{\mu' \rho}^{b' c}(x, x_3) + \mathcal{P}_{\mu' \nu}^{b' b}(x, x_2) \mathcal{P}_{\nu' \rho}^{c' c}(x, x_3)] \right. \\ + [\partial^{\mu'} \mathcal{P}^{a' b \nu' \nu}(x, x_2) - \partial^{\nu'} \mathcal{P}^{a' b \mu' \nu}(x, x_2)] [\mathcal{P}_{\mu' \rho}^{b' c}(x, x_3) \mathcal{P}_{\nu' \mu}^{c' a}(x, x_1) + \mathcal{P}_{\nu' \rho}^{c' c}(x, x_3) \mathcal{P}_{\mu' \mu}^{b' a}(x, x_1)] \\ \left. + [\partial^{\mu'} \mathcal{P}^{a' c \nu' \rho}(x, x_3) - \partial^{\nu'} \mathcal{P}^{a' c \mu' \rho}(x, x_3)] [\mathcal{P}_{\mu' \nu}^{b' b}(x, x_2) \mathcal{P}_{\nu' \mu}^{c' a}(x, x_1) + \mathcal{P}_{\nu' \nu}^{c' b}(x, x_2) \mathcal{P}_{\mu' \mu}^{b' a}(x, x_1)] \right\} \end{aligned} \quad (7.4.120)$$

où chaque ligne correspond à l'action de $\delta/i\delta J^{c\rho}(x_3)$ sur chacun des $J^{h_i\sigma_3}(z_i)$ de l'éq. (7.4.118). Rappelant que les tenseurs \mathcal{P} sont proportionnels aux propagateurs, $\mathcal{P}_{\mu' \mu}^{a' a}(x, y) = i G_{\mu' \mu}^{a' a}(x, y)$ et introduisant la transformée de Fourier de ces derniers (voir les éqs. ((7.4.104), 7.4.105)),

$$G_{\mu' \mu}^{a' a}(x, x_i) = \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \exp^{-ik(x-x_i)} \delta^{a' a} G_{\mu' \mu}(k), \quad (7.4.121)$$

dans l'éq. (7.4.120), puis effectuant l'intégrale sur x on trouve

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu\rho}^{abc}(x_1, x_2, x_3) = & -\frac{g}{2} f^{a'b'c'} \int \prod_{i=1}^3 \left(\frac{dk_i}{(2\pi)^4} e^{ik_i x_i} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3) \\ & \left\{ \delta^{a' a} [k_1^{\mu'} G^{\nu' \mu}(k_1) - k_1^{\nu'} G^{\mu' \mu}(k_1)] [\delta^{b' b} G_{\mu' \nu}(k_2) \delta^{c' c} G_{\nu' \rho}(k_3) + \delta^{c' b} G_{\nu' \nu}(k_2) \delta^{b' c} G_{\mu' \rho}(k_3)] \right. \\ & \delta^{a' b} [k_2^{\mu'} G^{\nu' \nu}(k_2) - k_2^{\nu'} G^{\mu' \nu}(k_2)] [\delta^{b' c} G_{\nu' \rho}(k_3) \delta^{c' a} G_{\nu' \mu}(k_1) + \delta^{c' c} G_{\nu' \rho}(k_3) \delta^{b' a} G_{\mu' \mu}(k_1)] \\ & \left. \delta^{a' c} [k_3^{\mu'} G^{\nu' \rho}(k_3) - k_3^{\nu'} G^{\mu' \rho}(k_3)] [\delta^{b' b} G_{\mu' \nu}(k_2) \delta^{c' a} G_{\nu' \mu}(k_1) + \delta^{c' b} G_{\nu' \nu}(k_2) \delta^{b' a} G_{\mu' \mu}(k_1)] \right\}. \end{aligned}$$

Contractant les indices de couleurs on fait facilement sortir un facteur global f^{abc} , et regroupant les termes de façon à faire apparaître la combinaison d'impulsions $k_1 - k_2$ portant l'indice de Lorentz de l'impulsion k_3 , soit $(k_1 - k_2)^{\mu'} G_{\mu' \rho}(k_3)$ (et de même pour les autres permutations), on trouve finalement

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu\rho}^{abc}(x_1, x_2, x_3) = & \int \prod_{i=1}^3 \left(\frac{dk_i}{(2\pi)^4} e^{ik_i x_i} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3) G_{\mu' \mu}(k_1) G_{\nu' \nu}(k_2) G_{\rho' \rho}(k_3) \\ & g f^{abc} [(k_1 - k_2)^{\rho'} g^{\mu' \nu'} + (k_2 - k_3)^{\mu'} g^{\nu' \rho'} + (k_3 - k_1)^{\nu'} g^{\rho' \mu'}]. \end{aligned} \quad (7.4.122)$$

Le vertex, au sens de diagramme de Feynman, est obtenu en tronquant la fonction à trois points des propagateurs externes et en omettant la conservation d'énergie-impulsion au vertex et le résultat est donc donné par la deuxième ligne de l'équation ci-dessus. La dérivation du couplage à trois gluons

a été donnée avec suffisamment de détails pour obtenir "facilement" le couplage à quatre gluons et on trouvera qu'il est proportionnel à $-ig^2$ fois une structure tensorielle en indices de couleur et de Lorentz relativement compliquée qui sera donnée plus bas. On remarque la différence de phase entre les couplages à trois et quatre gluons : l'absence de facteur i dans le cas de trois gluons est liée au fait que les dérivées $\partial^{\mu'}$, $\partial^{\nu'}$ dans l'éq. (7.4.120) font "descendre" les facteurs $-ik_i^{\mu'}$ dans le résultat final.

Fantômes

Pour le couplage, en *jauge covariante*, des fantômes aux gluons, on part de la densité lagrangienne d'interaction que l'on lit facilement de l'éq. (7.3.94) :

$$\mathcal{L}_{FP_I} = -gf^{a'b'c'}(\partial^{\mu'}\chi^{*a'})\chi^{b'}A_{\mu'}^{c'}. \quad (7.4.123)$$

La partie de la génératrice fonctionnelle à considérer pour extraire le couplage sera donc d'après l'éq. (7.2.42)

$$W[J, \zeta, \zeta^*] = -igf^{a'b'c'} \int dx \left(\partial^{\mu'} \frac{\delta}{i\delta\zeta^{*a'}(x)} \right) \left(\frac{\delta}{-i\delta\zeta^{b'}(x)} \right) \frac{\delta}{i\delta J^{c'\mu'}(x)} W_0[J] W_0[\zeta, \zeta^*] \quad (7.4.124)$$

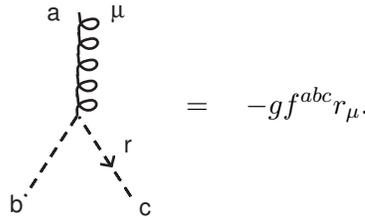
avec la génératrice des champs libres des gluons et des fantômes :

$$W_0[J] W_0[\zeta, \zeta^*] = \exp i \int dy dz [\zeta^{*d}(y) \mathcal{P}^{de}(y, z) \zeta^e(z) + \frac{1}{2} J^{d\rho}(y) \mathcal{P}_{\rho\sigma}^{de}(y, z) J^{e\sigma}(z)], \quad (7.4.125)$$

donnée par les éqs. (7.4.99), (7.4.109). La fonction à 3-points fantôme-fantôme-gluon est obtenue suivant l'éq. (7.2.37) par :

$$G_{FP,FP,\mu}^{abc}(x_1, x_2, x_3) = \left[\frac{\delta}{i\delta\zeta^{*c}(x_3)} \left(\frac{\delta}{-i\delta\zeta^b(x_2)} \right) \frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}(x_1)} W[J, \zeta, \zeta^*] \right]_{J, \zeta, \zeta^*=0}, \quad (7.4.126)$$

ce qui permet de dériver le couplage après troncation des propagateurs et de la fonction de conservation d'énergie implusion :



$$= -gf^{abc}r_{\mu}.$$

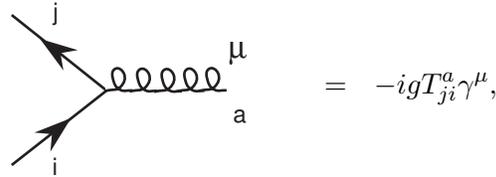
On remarque que ce couplage ne dépend que de l'impulsion r du champ de fantôme sortant en accord avec l'éq. (7.4.123) où l'opérateur de dérivation n'agit que sur le champ χ^* . On remarque également qu'il est valable dans la jauge de Landau aussi bien que dans la jauge de Feynman puisqu'indépendant du paramètre ξ de l'éq. (7.4.105).

Dans le cas de la *jauge axiale*, avec le choix $n \cdot A^c = 0$, les fantômes ne se couplent pas aux gluons comme on le voit en éq. (7.3.97). N'ayant pas d'interaction non plus avec les fermions, ils

ne se couplent donc à aucun champ "physique" et on peut les ignorer dans les calculs.

Fermions

On peut utiliser les techniques ci-dessus pour dériver le couplage du gluon aux fermions. On peut beaucoup plus simplement comparer le terme d'interaction d'un photon avec un fermion ψ de charge e dans \mathcal{L}_{QED} et celui d'un gluon avec un fermion $\psi = \{\psi_i\}$ de charge gT^a (gT_{ji}^a en composantes de couleur) dans \mathcal{L}_{QCD} , pour facilement en déduire par analogie le couplage recherché :



$$= -igT_{ji}^a \gamma^\mu,$$

où un gluon de couleur a est absorbé par un fermion de couleur i pour donner un fermion de couleur j comme indiqué sur le schéma.

• Remarques sur le propagateur du gluon

On peut se reporter à la section 2.5.1 pour discuter la relation entre la forme du propagateur du gluon et le nombre de degrés de liberté des vecteurs polarisation. On a vu que les formes covariantes du propagateur :

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i \delta^{ab} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad \text{et} \quad G_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i \delta^{ab} \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2}{k^2 + i\epsilon}, \quad (7.4.127)$$

respectivement en jauge de Feynman et de Landau contenaient des composantes de polarisation (scalaire, longitudinale) non physiques. En QED, le photon est couplé à un courant fermionique conservé et on a vu que ces composantes non physiques ne contribuent pas aux observables. Il en est de même pour un gluon couplé à un fermion. Mais un gluon interagit également avec les gluons par un couplage qui ne filtre pas les états non physiques. Il est donc nécessaire d'éliminer ces contributions par les champs de fantômes couplés aux gluons. En revanche, en jauge axiale dans la limite $\xi \rightarrow 0$,

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = -\frac{i \delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{n \cdot k} + n^2 \frac{k_\mu k_\nu}{(n \cdot k)^2} \right), \quad (7.4.128)$$

les degrés de polarisation non physiques sont éliminés (comme en QED, voir la discussion suivant l'éq. (2.5.77)) et les fantômes ne sont pas nécessaires.

7.5 Invariance BRS-T : Becchi-Rouet-Stora et Tyutin

L'interaction entre quarks et gluons a été construite au niveau classique en imposant l'invariance de jauge sous une transformation locale du groupe de couleur $SU(3)$: la densité lagrangienne éq. (7.1.30) de la section (7.1) est bien invariante sous la transformation de jauge définie par les équations (7.1.32). Mais on a vu que la procédure de quantification, respectant l'invariance de jauge, nécessite l'extension de ce lagrangien à la forme éq. (7.3.91) contenant la combinaison $\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}$ qui n'est pas invariante. On peut cependant montrer que ce lagrangien est invariant sous la transformation

BRS (Becchi-Rouet-Stora et plus tard Tyutin) qui est une extension de la transformation de jauge usuelle. Pour définir ces transformations on écrit, en toute généralité, le paramètre de jauge

$$\alpha^a(x) = \epsilon \chi^a(x) \quad (7.5.129)$$

où ϵ est une variable de Grassman et $\chi^a(x)$ le champ de fantôme. On peut vérifier que les transformations BRS :

$$\begin{aligned} \delta\psi &= ig\epsilon\chi^a T^a \psi \\ \delta A_\mu^a &= \epsilon \mathcal{D}_\mu^{ab} \chi^b \\ \delta\chi^a &= -\frac{1}{2} g f^{abc} \epsilon \chi^b \chi^c \\ \delta\chi^{*a} &= -\frac{1}{\xi} (\partial^\mu A_\mu^a) \epsilon \end{aligned} \quad (7.5.130)$$

laissent \mathcal{L}_{QCD} invariant. Ceci est évident pour la partie $\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F$ (les deux premières équations sont identiques aux deux premières lignes des éqs. (7.1.32), mais cela nécessite un peu de travail pour les autres termes. On ré-écrit d'abord $\mathcal{L}_{FP} = -\chi^{*a} \partial^\mu (\mathcal{D}_\mu^{ab} \chi^b)$ qui est équivalent à l'éq. (7.3.94) à une dérivée totale près que l'on néglige. On doit donc prouver que :

$$\delta(\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}) = -\frac{1}{\xi} (\partial^\mu A_\mu^a) (\partial^\nu \delta A_\nu^a) - (\delta\chi^{*a}) \partial^\mu (\mathcal{D}_\mu^{ab} \chi^b) - \chi^{*a} \partial^\mu \delta(\mathcal{D}_\mu^{ab} \chi^b) \quad (7.5.131)$$

est nulle. On voit facilement que, substituant δA_μ^a et $\delta\chi^{*a}$ des éqs. (7.5.130) respectivement dans le premier et deuxième terme du membre de droite, ces deux termes s'annulent de sorte qu'il s'agit de montrer maintenant que $\delta(\mathcal{D}_\mu^{ab} \chi^b) = 0$. On a

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{D}_\mu^{ab} \chi^b) &= \partial_\mu (\delta\chi^a) - g f^{abc} [(\delta A_\mu^c) \chi^b + A_\mu^c \delta\chi^b] \\ &= -\frac{1}{2} g f^{abc} \epsilon \partial_\mu (\chi^b \chi^c) - g f^{abc} [(\epsilon \mathcal{D}_\mu^{cd} \chi^d) \chi^b - \frac{1}{2} g f^{bde} A_\mu^c \epsilon \chi^d \chi^e] \\ &= -g f^{abc} \epsilon \left[\frac{1}{2} ((\partial_\mu \chi^b) \chi^c + \chi^b \partial_\mu \chi^c) + (\partial_\mu \chi^c) \chi^b - g f^{cde} A_\mu^e \epsilon \chi^d \chi^b - \frac{1}{2} g f^{bde} A_\mu^c \epsilon \chi^d \chi^e \right]. \end{aligned}$$

Le terme linéaire en g de la dernière ligne s'annule du fait de l'antisymétrie de f^{abc} et de l'anticommution des χ^i . Quant au terme en g^2 , il faut pour le réduire utiliser l'identité de Jacobi (cf éq. (7.1.22)) :

$$f^{abc} f^{bde} = f^{dcb} f^{abe} + f^{adb} f^{cbe} \quad (7.5.132)$$

qui permet de d'écrire

$$g^2 \epsilon [f^{abc} f^{cde} A_\mu^e \chi^d \chi^b + \frac{1}{2} f^{d'c'b'} f^{ab'e'} A_\mu^{c'} \chi^{d'} \chi^{e'} - \frac{1}{2} f^{ad'b'} f^{c'b'e'} A_\mu^{c'} \chi^{d'} \chi^{e'}], \quad (7.5.133)$$

où on a "primé" certains indices pour changement de notation ultérieur. Si l'on fait maintenant $(b', c', d', e') = (c, e, d, b)$ dans le deuxième facteur et $(b', c', d', e') = ((c, e, b, d)$ dans le troisième, alors on reconstruit

$$g^2 f^{abc} \epsilon [f^{cde} A_\mu^e \chi^d \chi^b - \frac{1}{2} f^{dec} A_\mu^e \chi^d \chi^b + \frac{1}{2} f^{ecd} A_\mu^e \chi^b \chi^d] = g^2 f^{abc} f^{cde} \epsilon [\chi^d \chi^b - \frac{1}{2} \chi^d \chi^b + \frac{1}{2} \chi^b \chi^d],$$

qui est bien nul.

On remarque que si on applique deux fois les transformations BRS c'est à dire si on calcule $\delta^2\psi, \dots$ alors le résultat est nul puisqu'il apparaît la combinaison $\epsilon\epsilon$ qui s'annule. Les transformations BRS sont dites nilpotentes. Il est possible de déduire des transformations BRS les identités de Slavnov-Taylor, l'équivalent des identités de Ward-Takahashi pour les théories de jauge non abéliennes, à l'aide desquelles on prouve la renormalisabilité de ces dernières à tous les ordres de perturbation.

7.6 Exemples de processus en arbre

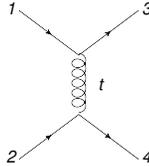
A l'aide des règles ci-dessus on peut "facilement" calculer les éléments de matrice de diffusion $2 \rightarrow 2$ qui seront utiles pour le calcul des sections efficaces de processus hadroniques au niveau de Born. On donnera suffisamment de détails pour les premiers cas étudiés de façon à familiariser le lecteur avec les règles de Feynman en QCD et on sera plus expéditif à la fin. Les particules entrantes sont labelées 1 et 2 et les sortantes 3 et 4. Les variables cinématiques sont :

$$s = 2p_1 \cdot p_2 = 2p_3 \cdot p_4, \quad t = -2p_1 \cdot p_3 = -2p_2 \cdot p_4, \quad u = -2p_1 \cdot p_4 = -2p_2 \cdot p_3. \quad (7.6.134)$$

On suppose les quarks de masse nulle.

- $q_1 q'_2 \rightarrow q_3 q'_4$

Les quarks q et q' ne sont pas identiques. Il existe un seul diagramme de Feynman avec échange d'un gluon dans la voie t :



L'amplitude de diffusion s'écrit :

$$\mathcal{M} = (-ig)^2 (\bar{u}_3 T^a \gamma_\mu u_1) \left(-\frac{i}{t}\right) (\bar{u}_4 T^a \gamma^\mu u_2), \quad (7.6.135)$$

où T^a est le facteur de couleur du vertex quark-quark-gluon. Cette expression est valable quelque soit la forme du propagateur du gluon (éq. (2.5.73) à 2.5.77)) puisque les termes dépendants de son impulsion s'annulent aux vertex. L'élément de matrice au carré sommé sur les états de polarisation et couleurs initiales et finales est :

$$\Sigma |\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{t^2} \sum_{spin, couleur} \langle T_{ji}^a T_{i'j'}^b \rangle (\bar{u}_{3j} \gamma_\mu u_{1i} \bar{u}_{1i'} \gamma_\nu u_{3j'}) \langle T_{lk}^a T_{k'l'}^b \rangle (\bar{u}_{4k} \gamma^\mu u_{2l} \bar{u}_{2l'} \gamma^\nu u_{4k'})$$

où on a spécifié l'indice de couleur des fermions. Usant de $u_{1i} \bar{u}_{1i'} = \delta_{ii'} \not{p}_1$ et autres relations

similaires on trouve finalement :

$$\begin{aligned}
\Sigma|\mathcal{M}|^2 &= g^4 \langle \text{Tr}(T^a T^b) \text{Tr}(T^a T^b) \rangle > \text{Tr}(\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu) \frac{1}{t^2} \text{Tr}(\not{p}_4 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu) \\
&= g^4 \langle \frac{\delta^{ab} \delta^{ab}}{2 \cdot 2} \rangle > 8 \frac{4 p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 + 4 p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{t^2} \\
&= g^4 \langle \frac{N^2 - 1}{4} \rangle > 8 \frac{s^2 + u^2}{t^2}
\end{aligned} \tag{7.6.136}$$

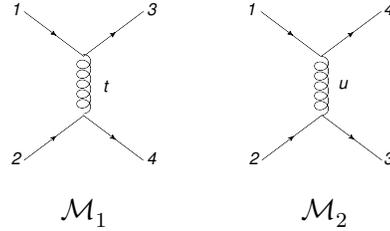
où on a systématiquement écrit le facteur de couleur entre $\langle \rangle$ (N est le nombre de couleurs). Pour obtenir le résultat recherché il faut diviser par le nombre d'états de polarisation et de couleur du système initial soit $1/4N^2$ et on trouve,

$$\boxed{\overline{\Sigma}|\mathcal{M}|^2 = g^4 \langle \frac{C_F}{2N} \rangle > 2 \frac{s^2 + u^2}{t^2} = g^4 \frac{4}{9} \frac{s^2 + u^2}{t^2}}, \tag{7.6.137}$$

où le symbole $\overline{\Sigma}|\mathcal{M}|^2$ dénote le carré d'une amplitude sommé sur les états de polarisation et couleur finals et moyenné sur états initiaux. Ce résultat est valable pour la diffusion $q_1 q_2' \rightarrow q_3 q_4'$ et $q_1 \bar{q}_2' \rightarrow q_3 \bar{q}_4'$.

• $\boxed{q_1 q_2 \rightarrow q_3 q_4}$: quarks identiques

Dans ce cas il y a deux diagrammes avec l'échange d'un gluon dans la voie t ou dans la voie u : l'élément de matrice est la différence de deux termes $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2$,



et s'écrit :

$$\mathcal{M} = (-ig)^2 [(\bar{u}_3 T^a \gamma_\mu u_1) (-\frac{i}{t}) (\bar{u}_4 T^a \gamma^\mu u_2) - (\bar{u}_4 T^a \gamma_\mu u_1) (-\frac{i}{u}) (\bar{u}_3 T^a \gamma^\mu u_2)], \tag{7.6.138}$$

où le signe $-$ relatif entre les deux termes vient de l'interchange des quarks 3 et 4 qui obéissent à la statistique de Fermi-Dirac. Le calcul du carré de chacun de ces termes est similaire au cas précédent. Le terme d'interférence a une forme différente puisqu'il implique une seule trace et il s'écrit :

$$-2g^2 \langle \text{Tr} T^a T^b T^a T^b \rangle > \frac{1}{ut} \text{Tr} \not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_4 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu. \tag{7.6.139}$$

Le réduction du facteur de couleur donne (voir l'appendice sec. 7.9) :

$$\begin{aligned}
\text{Tr} T^a T^b T^a T^b &= \text{Tr} T^b T^a T^a T^b + i f^{abc} \text{Tr} T^c T^a T^b \\
&= c_F \text{Tr} T^b T^b + \frac{i}{2} f^{abc} \text{Tr} T^c [T^a, T^b] \\
&= c_F^2 N - \frac{1}{2} f^{abd} f^{abc} \text{Tr} T^c T^d \\
&= -\frac{c_F}{2},
\end{aligned} \tag{7.6.140}$$

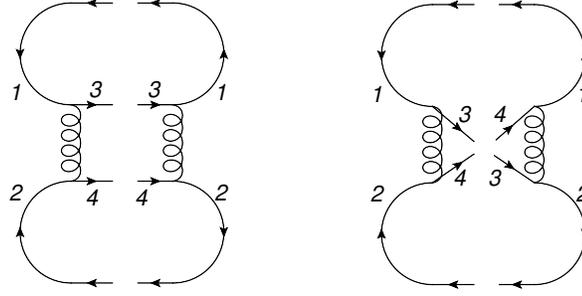


FIGURE 7.1 – Diffusion de deux quarks identiques : à gauche représentation de $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_1^*$, à droite celle de $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*$.

tandis que la trace sur les matrices de Dirac ne présente pas de difficultés et ce terme d'interférence est simplement

$$-\frac{c_F}{2}g^2 16 \frac{s^2}{ut}. \quad (7.6.141)$$

Prenant la moyenne sur les états initiaux (il faut diviser par $4N^2$) on trouve pour la diffusion de deux quarks identiques

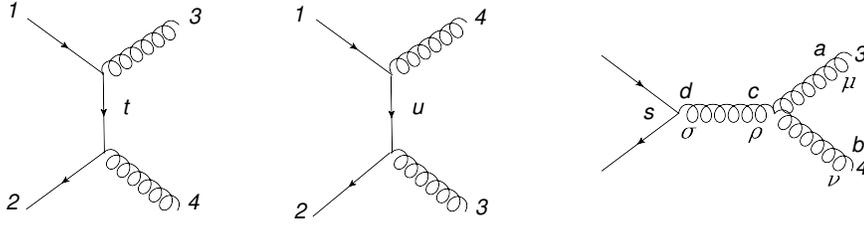
$$\boxed{\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= g^4 \left\langle \frac{C_F}{2N} \right\rangle 2 \left[\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} - \left\langle \frac{1}{N} \right\rangle 2 \frac{s^2}{ut} \right] \\ &= g^4 \left[\frac{4}{9} \left(\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} \right) - \frac{8}{27} \frac{s^2}{ut} \right]. \end{aligned}} \quad (7.6.142)$$

qui est également valable pour la diffusion $q_1 \bar{q}_2 \rightarrow q_3 \bar{q}_4$.

On peut donner une représentation graphique du carré de l'élément de matrice. Le complexe conjugué de l'amplitude $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ est celle de $3 + 4 \rightarrow 1 + 2$ que l'on peut représenter par des diagrammes similaires à ceux de l'amplitude originale. Rapprochant un diagramme de son complexe conjugué et refermant les lignes qui portent le même label on obtient le diagramme de gauche de la figure 7.1 avec deux boucles de fermions (correspondant à deux traces), à chacune desquelles on associe un facteur N de couleur. Le terme d'interférence, représenté par le diagramme de droite, comprend au contraire une seule boucle (une seule trace) et un seul facteur N , d'où le $1/N$ relatif dans l'éq. (7.6.142).

- $\boxed{q_1 \bar{q}_2 \rightarrow G_3 G_4; q_1 G_2 \rightarrow q_3 G_4; G_1 G_2 \rightarrow q_3 q_4}$: diffusion quark-gluon

Ce processus est intéressant puisqu'il permet d'illustrer les subtilités des calculs QCD en faisant intervenir explicitement la structure non-abélienne de la théorie. Les trois diagrammes à considérer sont indiqués dans la figure :



et l'amplitude de diffusion pour des gluons de polarisation κ_3, κ_4 s'écrit

$$\mathcal{M}^{(\kappa_3, \kappa_4)} = \mathcal{M}^{ab, \mu\nu} \epsilon_\mu^{a, (\kappa_3)}(p_3) \epsilon_\nu^{b, (\kappa_4)}(p_4) \quad (7.6.143)$$

où on suppose que les vecteurs polarisation des gluons d'impulsion p_3 et p_4 satisfont la condition de Lorentz :

$$p_3 \cdot \epsilon^{a, (\kappa_3)}(p_3) = 0 \quad \text{et} \quad p_4 \cdot \epsilon^{b, (\kappa_4)}(p_4) = 0. \quad (7.6.144)$$

L'amplitude pour $q_1 \bar{q}_2 \rightarrow G_3 G_4$ (le résultat pour les autres processus se déduit par croisement) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{ab, \mu\nu} = & (-ig) \bar{v}_2 [(-ig) T^b T^a \gamma^\nu \frac{\not{p}_1 - \not{p}_3}{t} \gamma^\mu + (-ig) T^a T^b \gamma^\mu \frac{\not{p}_3 - \not{p}_2}{u} \gamma^\nu \\ & + g T^d \gamma^\sigma \frac{G_{\sigma\rho}^{dc}(p_3 + p_4)}{s} f^{abc} V^{\mu\nu\rho}(p_3, p_4, -p_3 - p_4)] u_1, \end{aligned} \quad (7.6.145)$$

avec $G_{\sigma\rho}^{dc}(p_3 + p_4)$ l'une des trois formes du propagateur du gluon (éqs. (7.4.127) et (7.4.128)) et la fonction $V^{\mu\nu\rho}(p, q, r) = (p-q)^\rho g^{\mu\nu} + (q-r)^\mu g^{\nu\rho} + (r-p)^\mu g^{\nu\rho}$ est la partie dépendant des impulsions du couplage à 3 gluons, les impulsions p, q, r étant supposées sortantes du vertex.

• 1^{ère} **remarque** : Seul le terme $g_{\sigma\rho}$ dans le propagateur du gluon contribue : en effet, les termes contenant $(p_1 + p_2)_\sigma$ contractés avec $\bar{v}_2 \gamma^\sigma u_1$ s'annulent par l'équation de Dirac (conservation du courant fermionique) et les termes en $(p_1 + p_2)_\rho$ contractés avec $F^{\mu\nu\rho}(p_3, p_4, -p_1 - p_2)$ se réduisent à $(p_4^\mu p_4^\nu - p_3^\mu p_3^\nu)$ qui s'annule quand contracté avec les vecteurs polarisation des gluons. Dans la suite on utilisera la forme éq. (7.4.127) pour le propagateur du gluon.

• 2^{ème} **remarque** : On vérifie, comme pour QED, que si on substitue l'impulsion à l'un des vecteurs polarisation les quantités $\mathcal{M}^{ab, \mu\nu} p_{3\mu} \epsilon_\nu^{b, (\kappa_4)} = \mathcal{M}^{ab, \mu\nu} \epsilon_\mu^{a, (\kappa_3)} p_{4\nu} = 0$, mais, contrairement à QED, le terme impliquant le couplage à 3 gluons est nécessaire pour compenser la contribution des 2 premiers termes d'apparence abélienne dans la figure ci-dessus. En détail,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{ab, \mu\nu} p_{3\mu} \epsilon_{4\nu}^{b, (\kappa_4)} = & -ig^2 \bar{v}_2 [T^b T^a \not{\epsilon}^{b, (\kappa_4)} \frac{\not{p}_1 - \not{p}_3}{t} \not{p}_3 + T^a T^b \not{p}_3 \frac{\not{p}_3 - \not{p}_2}{u} \not{\epsilon}^{b, (\kappa_4)} \\ & - if^{abc} T^c \frac{1}{s} ((\not{p}_3 - \not{p}_4) p_3 \cdot \epsilon_4 + (p_3 + 2p_4) \cdot p_3 \not{\epsilon}^{b, (\kappa_4)} - (p_4 + 2p_3) \cdot \epsilon^{b, (\kappa_4)} \not{p}_3)] u_1. \end{aligned} \quad (7.6.146)$$

On effectue facilement la "diracologie" en prouvant que

$$\frac{\not{p}_1 - \not{p}_3}{t} \not{p}_3 = -1 \quad \text{et} \quad \not{p}_3 \frac{\not{p}_3 - \not{p}_2}{u} \not{p}_3 = 1 \quad (7.6.147)$$

quand évalué dans $\bar{v}_2 [\dots] u_1$, et que le coefficient de $-if^{abc}T^c/s$ se réduit à $s \not{\epsilon}^{b,(\kappa_4)}$ ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{ab,\mu\nu} p_{3\mu} \epsilon_{4\nu}^{b,(\kappa_4)} &= -ig^2 \bar{v}_2 [(-T^b T^a + T^a T^b) \not{\epsilon}^{b,(\kappa_4)} - i f^{abc} T^c \not{\epsilon}^{b,(\kappa_4)}] u_1 \\ &= -ig^2 \bar{v}_2 [i f^{abc} T^c - i f^{abc} T^c] \not{\epsilon}^{b,(\kappa_4)} u_1 = 0. \end{aligned} \quad (7.6.148)$$

Cette vérification ne prouve pas l'invariance de jauge QCD, comme c'était le cas en QED, mais seulement l'invariance par la translation $\epsilon_\mu^{a,(\kappa)}(p) \rightarrow \epsilon_\mu^{a,(\kappa)}(p) + p_\mu$. En fait, les vecteurs $\epsilon_\mu^{a,(\kappa)}(p)$ contraints par l'éq. (7.6.144) contiennent un état de polarisation non physique, somme des polarisations scalaire et longitudinale, $(\epsilon_\mu^{a,(0)}(p) + \epsilon_\mu^{a,(3)}(p)) \propto p$ (voir éqs. (2.4.53) et la relation telle que :

$$\mathcal{M}^{ab,\mu\nu} p_{3\mu} \epsilon_{4\nu}^{b,(\kappa_4)} = 0$$

signifie que cet état de polarisation ne contribue pas aux processus physiques.

• **Calcul de $\bar{\Sigma}\mathcal{M}^2$** : On calcule maintenant explicitement le carré de l'élément de matrice sommé sur polarisation et couleur. On travaille en jauge de Feynman éq. (7.4.127). Pour la somme sur la polarisation des gluons externes on choisit également $g_{\mu\nu}$ (voir éq. 2.4.56) ce qui implique⁴ que l'on somme sur les états de polarisation non physiques et il faudra donc les compenser en incluant dans le calcul la production de fantômes (voir plus bas). On décompose l'amplitude en trois termes :

$$\mathcal{M}^{ab,\mu\nu} = \mathcal{M}_1^{ab,\mu\nu} + \mathcal{M}_2^{ab,\mu\nu} + \mathcal{M}_3^{ab,\mu\nu} \quad (7.6.149)$$

les deux premiers d'apparence abélienne et le troisième contenant le couplage à trois gluons. En notation simplifiée on a

$$\begin{aligned} \Sigma|\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 &= g^4 \left[\text{Tr}(\not{p}_2 \gamma^\nu \frac{\not{p}_4 - \not{p}_2}{t} \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu \frac{\not{p}_4 - \not{p}_2}{t} \gamma_\nu) \text{Tr}(T^b T^a T^a T^b) \right. \\ &+ \text{Tr}(\not{p}_2 \gamma^\mu \frac{\not{p}_3 - \not{p}_2}{u} \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu \frac{\not{p}_3 - \not{p}_2}{u} \gamma_\mu) \text{Tr}(T^a T^b T^b T^a) \\ &+ \left. 2 \text{Tr}(\not{p}_2 \gamma^\nu \frac{\not{p}_4 - \not{p}_2}{t} \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\nu \frac{\not{p}_3 - \not{p}_2}{u} \gamma_\mu) \text{Tr}(T^b T^a T^b T^a) \right] \end{aligned} \quad (7.6.150)$$

Les traces sur les matrices γ s'effectuent facilement et on trouve pour les deux premières qu'elles sont simplement égales à $8tu$ quant à la troisième elle est tout simplement nulle. Les traces sur les matrices de couleur sont triviales $\text{Tr}(T^b T^a T^a T^b) = \text{Tr}(T^a T^b T^b T^a) = c_F^2 N$. de sorte que :

$$\Sigma|\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 = g^4 < c_F^2 N > 8 \left(\frac{u}{t} + \frac{t}{u} \right). \quad (7.6.151)$$

Le carré du terme contenant le couplage à 3 gluons est

$$\begin{aligned} |\Sigma\mathcal{M}_3|^2 &= g^4 f^{abc} f^{abd} \text{Tr}(T^c T^d) \frac{1}{s^2} \text{Tr}(\not{p}_2 \gamma_\rho \not{p}_1 \gamma^\sigma) [(p_3 - p_4)^\rho g^{\mu\nu} + (p_3 + 2p_4)^\mu g^{\nu\rho} - (p_4 + 2p_3)^\nu g^{\rho\mu}] \\ &\quad [(p_3 - p_4)_\sigma g_{\mu\nu} + (p_3 + 2p_4)_\mu g_{\nu\sigma} - (p_4 + 2p_3)_\nu g_{\sigma\mu}] \\ &= g^4 < c_F N^2 > \frac{1}{s^2} \text{Tr}(\not{p}_2 \gamma_\rho \not{p}_1 \gamma^\sigma) [12p_4^\rho p_4^\sigma + 4s g^{\rho\sigma} + p_3^\rho p_4^\sigma + p_4^\rho p_3^\sigma] \\ &= -g^4 < c_F N^2 > \frac{4}{s^2} (4(t^2 + u^2) + 3tu). \end{aligned} \quad (7.6.152)$$

4. Avec ce choix on n'impose pas la contrainte $p_i \cdot \epsilon^{a,(\kappa_i)}(p_i) = 0$ aux vecteurs polarisation.

Il faut encore évaluer le terme d'interférence

$$2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_3^* = g^4 \frac{2}{ts} (i f^{abc} \operatorname{Tr}(T^b T^a T^c) \operatorname{Tr}(\not{p}_2 \gamma^\nu (\not{p}_1 - \not{p}_3) \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\rho) [(p_3 - p_4)_\rho g_{\mu\nu} + (p_3 + 2p_4)_\mu g_{\nu\rho} - (p_4 + 2p_3)_\nu g_{\rho\mu}]. \quad (7.6.153)$$

La réduction des traces de matrices de Dirac est un peu longue mais on trouve finalement

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_3^* &= g^4 \left\langle \frac{c_F N^2}{2} \right\rangle \left(-16 \frac{t}{s}\right) \\ 2 \operatorname{Re} \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_3^* &= g^4 \left\langle \frac{c_F N^2}{2} \right\rangle \left(-16 \frac{u}{s}\right). \end{aligned} \quad (7.6.154)$$

Le calcul n'est malheureusement pas encore terminé car on a sommé sur des états de polarisation non physiques en utilisant éq. 2.4.56. Pour compenser leur contribution dans le calcul précédent il faut inclure la contribution des fantômes en évaluant la contribution des diagrammes suivants :



Ces diagrammes correspondent respectivement à la production des couples $\chi^a \chi^{b*}$ et $\chi^b \chi^{a*}$. Il n'interfèrent donc pas ni d'ailleurs avec les diagrammes de production de gluons et il suffira donc d'évaluer le carré de chacun pour s'approcher de la fin du calcul. Les amplitudes correspondant à ces diagrammes sont respectivement :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{gh1} &= (-ig) \bar{v}_2 T^c \gamma_\rho u_1 \left(\frac{-i}{s}\right) (-g f^{cba} p_3^\rho) \\ \mathcal{M}_{gh2} &= (-ig) \bar{v}_2 T^c \gamma_\rho u_1 \left(\frac{-i}{s}\right) (-g f^{cab} p_4^\rho). \end{aligned} \quad (7.6.155)$$

Le carré de ces termes est

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{gh1}^2 + \mathcal{M}_{gh2}^2 &= g^4 \left\langle f^{cba} f^{dba} \operatorname{Tr}(T^c T^d) \right\rangle \frac{\operatorname{Tr}(\not{p}_2 \not{p}_3 \not{p}_1 \not{p}_3)}{s^2} + 3 \leftrightarrow 4 \\ &= g^4 \left\langle N \operatorname{Tr}(T^c T^c) \right\rangle \frac{2p_1 \cdot p_3 \operatorname{Tr}(\not{p}_2 \not{p}_3)}{s^2} + 3 \leftrightarrow 4 \\ &= g^4 \left\langle c_F N^2 \right\rangle 4 \frac{tu}{s^2} \end{aligned} \quad (7.6.156)$$

Cette contribution doit être soustraite de celle des diagrammes de production de gluons de sorte que l'amplitude carré de $q\bar{q} \rightarrow G G$ sommée sur polarisation et couleur est

$$\begin{aligned} \Sigma \mathcal{M}^2 &= \Sigma |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 + \Sigma |\mathcal{M}_3|^2 + 2 \operatorname{Re} \Sigma (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) \mathcal{M}_3^* - \Sigma |\mathcal{M}_{gh1}|^2 - \Sigma |\mathcal{M}_{gh2}|^2 \\ &= g^4 \left\langle c_F N \right\rangle 8 \left[\left\langle c_F \right\rangle \left(\frac{t}{u} + \frac{u}{t}\right) - \left\langle N \right\rangle \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.6.157)$$

On reconnaît dans cette expression une partie de type QED proportionnelle à c_F et l'autre de type non-abélien proportionnelle à N . On peut facilement obtenir alors le carré des éléments de matrice

moyennés sur les états initiaux pour les différents cas, après croisement approprié des particules initiales et finales.

- $q(p_1) \bar{q}(p_2) \rightarrow G(p_3) G(p_4)$: il faut multiplier l'éq. (7.6.157) par $\frac{1}{4N^2}$

$$\boxed{\bar{\Sigma}\mathcal{M}^2 = 2g^4 \left\langle \frac{c_F}{N} \right\rangle \left[\left\langle c_F \right\rangle \left(\frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right) - \left\langle N \right\rangle \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right] = g^4 \left[\frac{32}{27} \left(\frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right) - \frac{8}{3} \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right]} \quad (7.6.158)$$

- $G(p_1) q(p_2) \rightarrow G(p_3) q(p_4)$: il faut multiplier l'éq. (7.6.157) par $\frac{1}{4N(N^2-1)}$

$$\boxed{\bar{\Sigma}\mathcal{M}^2 = -g^4 \left\langle \frac{1}{N} \right\rangle \left[\left\langle c_F \right\rangle \left(\frac{s}{u} + \frac{u}{s} \right) - \left\langle N \right\rangle \frac{s^2 + u^2}{t^2} \right] = g^4 \left[-\frac{4}{9} \left(\frac{s}{u} + \frac{u}{s} \right) + \frac{s^2 + u^2}{t^2} \right]} \quad (7.6.159)$$

- $G(p_1) G(p_2) \rightarrow q(p_3) \bar{q}(p_4)$: il faut multiplier l'éq. (7.6.157) par $\frac{1}{4(N^2-1)^2}$

$$\boxed{\bar{\Sigma}\mathcal{M}^2 = g^4 \left\langle \frac{1}{N^2-1} \right\rangle \left[\left\langle c_F \right\rangle \left(\frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right) - \left\langle N \right\rangle \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right] = g^4 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right) - \frac{3}{8} \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right]} \quad (7.6.160)$$

Pour dériver ces résultats une alternative aurait été de travailler avec seulement des états de polarisation physiques, c'est à dire d'utiliser l'expression

$$\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{n \cdot k} + n^2 \frac{k_\mu k_\nu}{(n \cdot k)^2} \right)$$

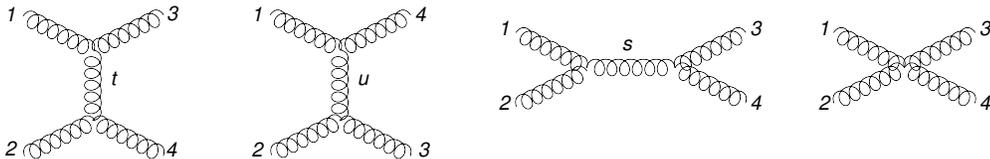
pour la somme sur les états de polarisation (voir éq. (7.4.128)). Dans ce cas il n'y a pas lieu d'introduire de fantômes, puisqu'il n'y a pas de contributions non physiques à soustraire, en accord avec la discussion sur les règles de Feynman en jauge "physique" (sec. 7.4). Le vecteur n_μ peut être choisi de façon à simplifier le calcul, ainsi pour la réaction $G_1 q_2 \rightarrow G_3 q_4$ on peut imposer $p_2 \cdot \epsilon^{a,(\kappa_1)}(p_1)$, $p_4 \cdot \epsilon^{b,(\kappa_3)}(p_3) = 0$ de sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^2 \epsilon_\mu^{a,(\kappa)}(p_1) \epsilon_\nu^{a',(\kappa')}(p_1) &= -\delta^{aa'} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu}}{p_1 \cdot p_2} \right), \\ \sum_{\kappa=1}^2 \epsilon_\mu^{a,(\kappa)}(p_3) \epsilon_\nu^{a',(\kappa')}(p_3) &= -\delta^{aa'} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_{3\mu} p_{4\nu} + p_{4\mu} p_{3\nu}}{p_3 \cdot p_4} \right). \end{aligned} \quad (7.6.161)$$

On laisse le lecteur retrouver les formules éqs. (7.6.158) à (7.6.160) avec ce choix de vecteurs polarisation (voir l'exercice).

• $\boxed{G G \rightarrow G G}$: diffusion gluon-gluon

Les diagrammes à évaluer sont :



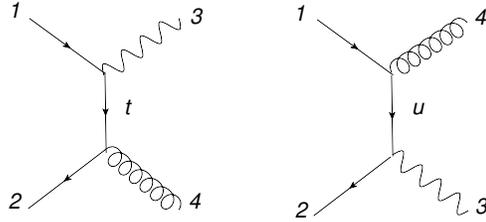
avec éventuellement les diagrammes impliquant les fantômes si on travaille en jauge covariante. On trouve :

$$\boxed{\overline{\Sigma}\mathcal{M}^2 = g^4 \left\langle \frac{16N^2}{N^2 - 1} \right\rangle \frac{1}{4} \left[3 - \frac{tu}{s^2} - \frac{us}{t^2} - \frac{st}{u^2} \right] = g^4 \frac{9}{2} \left[3 - \frac{tu}{s^2} - \frac{us}{t^2} - \frac{st}{u^2} \right]} \quad (7.6.162)$$

Par complétude nous citons ici les résultats pour la diffusion de partons impliquant l'émission ou l'absorption d'un photon.

• $\boxed{q \bar{q} G \gamma \rightarrow 0}$: diffusion photon-parton

Ces processus sont de type QED,



Il n'y a pas de couplage à 3 bosons de jauge et donc pas de terme non abélien dans l'élément de matrice : on ignore donc le terme proportionnel à N dans la partie entre [...] de l'éq. (7.6.157) et la sommation sur la couleur de tous les partons contribue le facteur :

$$Tr(T^a T^a) = \delta^{aa}/2 = \frac{N^2 - 1}{2} = c_F N, \quad (7.6.163)$$

au lieu de $\langle c_F^2 N \rangle$. Pour les différents processus on a donc, après moyenne sur polarisation et couleur initiales,

- $q(p_1) \bar{q}(p_2) \rightarrow \gamma(p_3) G(p_4)$ (il faut multiplier par $\frac{1}{4N^2}$) :

$$\boxed{\overline{\Sigma}\mathcal{M}^2 = e_q^2 g^2 \left\langle \frac{c_F}{N} \right\rangle 2 \left[\frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right] = e_q^2 g^2 \frac{8}{9} \left[\frac{t}{u} + \frac{u}{t} \right]} \quad (7.6.164)$$

- $G(p_1) q(p_2) \rightarrow \gamma(p_3) q(p_4)$ (il faut multiplier par $\frac{1}{4N(N^2-1)}$) :

$$\boxed{\overline{\Sigma}\mathcal{M}^2 = -e_q^2 g^2 \left\langle \frac{1}{2N} \right\rangle 2 \left[\frac{u}{s} + \frac{s}{u} \right] = -e_q^2 g^2 \frac{1}{3} \left[\frac{u}{s} + \frac{s}{u} \right]} \quad (7.6.165)$$

- $\gamma(p_1) q(p_2) \rightarrow G(p_3) q(p_4)$ (il faut multiplier par $\frac{1}{4N}$) :

$$\boxed{\overline{\Sigma}\mathcal{M}^2 = e_q^2 g^2 \left\langle c_F \right\rangle 2 \left[\frac{u}{s} + \frac{s}{u} \right] = e_q^2 g^2 \frac{8}{3} \left[\frac{u}{s} + \frac{s}{u} \right]} \quad (7.6.166)$$

7.7 Hadrons et quarks colorés

On a vu dans la section 6.1 qu'un méson est composé d'une paire quark-antiquark et un baryon d'un triplet de quarks avec la contrainte que leur fonction d'onde est invariante sous l'action d'un élément du groupe de couleur, c'est à dire que méson et baryon sont respectivement de la forme :

$$M = \sum (\bar{q}_i q'_i), \quad B = \epsilon_{ijk} q_i q'_j q''_k \quad (7.7.167)$$

avec l'indice de couleur $i, j, k = 1, 2, 3$. Sous une transformation de type éq. (7.1.3) M est bien invariant puisque U est unitaire. Pour le cas du baryon si on paramètre la matrice $U = (u_{ij})$, alors sous l'action d'un élément du groupe B devient

$$B' = \epsilon_{ijk} u_{il} u_{jm} u_{kn} q_l q'_m q''_n. \quad (7.7.168)$$

On vérifie facilement que si deux parmi les indices l, m, n sont égaux alors la combinaison est nulle et si on fait $q_l q'_m \rightarrow q_m q'_l$ alors $B' \rightarrow -B'$. Finalement pour $l = 1, m = 2, n = 3$ on a $\epsilon_{ijk} u_{i1} u_{j2} u_{k3} q_1 q'_2 q''_3 = \det U q_1 q'_2 q''_3$. Combinant toutes ces observations on prouve que, sous une transformation de type éq. (7.1.3), $B' = \det U (\epsilon_{lmn} q_l q'_m q''_n) = \det U B$ qui est bien invariant si le groupe est spécial unitaire puisque alors $\det U = 1$. Si on avait choisi $U(3)$ plutôt que $SU(3)$ comme groupe d'invariance locale on aurait eu un problème de normalisation de la fonction d'onde du baryon mais, plus important encore, on aurait un "gluon incolore" de masse nulle qui aurait engendré une interaction à longue portée entre hadrons singulets de couleur ce qui est physiquement exclu car on sait que l'interaction forte entre hadrons est de portée finie de l'ordre de $1/m_{\text{pion}}$. On rappelle finalement que le groupe d'invariance n'aurait pas pu être $O(3)$ ou $SO(3)$ puisque, dans ce cas, les quarks et les antiquarks appartiennent à la même représentation et on pourrait alors construire des systèmes à deux quarks, $\sum (q_i q'_i)$, singulets de couleur, qui ne sont pas observés.

7.8 Appendice I : Résumé des règles de Feynman en QCD

— Propagateur du fermion

$$\begin{array}{c} i \quad \quad \quad j \\ \hline \longrightarrow \end{array} = \delta_{ij} \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

— Propagateur du gluon, *jauge covariante*

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} (g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) = \delta^{ab} G_{\mu\nu}(k). \quad (7.8.169)$$

où $\xi = 0$ *jauge de Landau*, $\xi = 1$ *jauge de Feynman*

— Propagateur du gluon, *jauge axiale*, $n \cdot A_\mu^a(x) = 0$

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k \cdot n} + n^2 \frac{k_\mu k_\nu}{(k \cdot n)^2}). \quad (7.8.170)$$

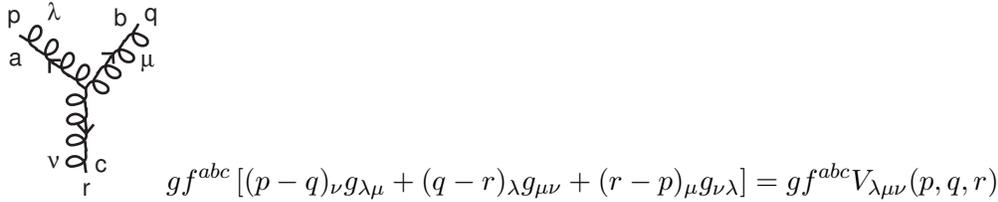
— Propagateur du fantôme

$$\begin{array}{c} a \quad \quad \quad b \\ \hline \text{---} \\ \text{p} \end{array} = -\delta_{ab} \frac{i}{p^2 + i\epsilon}.$$

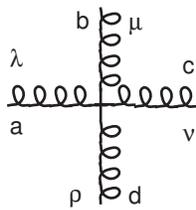
— Vertex gluon-fermion-fermion



— Vertex à 3 gluons



— Vertex à 4 gluons



$$-ig^2 [f^{abe} f^{cde} (g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu}) + f^{ace} f^{bde} (g_{\lambda\mu} g_{\nu\rho} - g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu}) + f^{ade} f^{bce} (g_{\lambda\mu} g_{\nu\rho} - g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho})]$$

$$= -ig^2 V_{\lambda\mu\nu\rho}^{abcd}$$

— Vertex gluon-fantôme-fantôme, *jauge covariante*



— Boucle de fantômes, *jauge covariante*

Les fantômes obéissant à la statistique de Fermi-Dirac il faut associer un facteur -1 à chaque boucle de fantômes (comme pour les fermions).

7.9 Appendice II : Facteurs de couleur pour SU(N)

Les relations suivantes sont utiles pour le calcul des facteurs de couleur des diagrammes en QCD :

$$\begin{aligned}
 [T^a, T^b] &= i f^{abc} T^c, & f^{abc} \text{ totalement antisymétrique} \\
 \{T^a, T^b\} &= \frac{\delta^{ab}}{N} + d^{abc} T^c, & d^{abc} \text{ totalement symétrique} \\
 \text{Tr } T^a &= 0 \\
 \text{Tr } T^a T^b &= \frac{\delta^{ab}}{2} \\
 \sum_a (T^a T^a)_{ij} &= c_F \delta_{ij}, & c_F = \frac{N^2 - 1}{2N}, \text{ Casimir de la représentation fondamentale} \\
 \sum_{cd} f^{acd} f^{bcd} &= c_A \delta^{ab}, & c_A = N, \text{ Casimir de l' adjointe} \\
 \sum_{cd} d^{acd} d^{bcd} &= \left(N - \frac{4}{N}\right) \delta^{ab}
 \end{aligned}$$

Une représentation utile des générateurs de SU(3) est $T^a = \lambda^a / 2$ avec λ^a , les matrices de Gell-Mann.

