

Chapitre 8

Chromodynamique Quantique : Renormalisation à une boucle

8.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'identifier les divergences ultraviolettes des diagrammes à une boucle de QCD et après avoir défini un schéma de renormalisation d'introduire le couplage mobile et démontrer la propriété de liberté asymptotique. Comme pour QED, on suppose que le lagrangien éq. (7.3.91) de la section 7.3,

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_F, \quad (8.1.1)$$

est exprimé en termes des quantités nues et on introduit à priori des quantités renormalisées en relation avec ces dernières. On construira le développement perturbatif à l'aide des quantités renormalisées. Ceci est un peu fastidieux mais nécessaire ! On définit donc :

$$\psi_B = Z_2^{1/2} \psi \ ; \ A_{B\mu}^a = Z_3^{1/2} A_\mu^a \ ; \ \chi_B^a = \tilde{Z}_3^{1/2} \chi^a \ ; \ m_B = \frac{Z_0}{Z_2} m \quad (8.1.2)$$

$$g_B = \frac{Z_{1F}}{Z_2 Z_3^{1/2}} g \mu^\epsilon = \frac{Z_1}{Z_3^{3/2}} \tilde{g} \mu^\epsilon = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3 Z_3^{1/2}} \tilde{\tilde{g}} \mu^\epsilon \ ; \ \xi_B = Z_3 \xi. \quad (8.1.3)$$

On a introduit trois constantes renormalisées : g couplage gluon-fermion, $\tilde{g}$ autocouplage des gluons et $\tilde{\tilde{g}}$ couplage gluon-fantômes. On peut montrer qu'il n'est pas nécessaire d'introduire une constante de renormalisation spécifique pour le paramètre de jauge. En fonction des ces nouvelles variables la densité lagrangienne s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} = & -\frac{1}{4} Z_3 \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \left(\frac{Z_1}{Z_3} \tilde{g} \right) f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right)^2 \\ & + \tilde{Z}_3 (\partial^\mu \chi^{*a}) \left(\delta^{ab} \partial_\mu - \left(\frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} \tilde{\tilde{g}} \right) f^{abc} A_\mu^c \right) \chi^b - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 \\ & + Z_2 \bar{\psi} i \left(\partial_\mu - i \left(\frac{Z_{1F}}{Z_2} g \right) A_\mu^b T^b \gamma^\mu \right) \psi - Z_0 \bar{\psi} m \psi. \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

- Contre-termes de masse de fermion :

$$-i \delta Z_0 \delta^{ji} m = i \longrightarrow \times \longrightarrow j$$

- Contre-terme du couplage à 3 gluons :

$$g\mu^\varepsilon \delta Z_1 f^{abc} V_{\mu\nu\rho}(q_1, q_2, q_3) = \text{diagramme à 3 gluons} \quad V_{\mu\nu\rho}(q_1, q_2, q_3) \text{ défini en sec. 7.8}$$

- Contre-terme du couplage à 4 gluons :

$$-i g^2 \mu^{2\varepsilon} (2\delta Z_1 - \delta Z_3) V_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} = \text{diagramme à 4 gluons} \quad V_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} \text{ défini en sec. 7.8}$$

- Contre-terme du couplage du fantôme au gluon :

$$-g\mu^\varepsilon \delta \tilde{Z}_1 f^{abc} r_\mu = \text{diagramme fantôme-gluon}$$

- Contre-terme du couplage du fermion au gluon :

$$-i g\mu^\varepsilon \delta Z_{1F} T_{ji}^a \gamma_\mu = \text{diagramme fermion-gluon}$$

• Identification des diagrammes divergents

Pour identifier les diagrammes potentiellement divergents, en 4 dimensions, de la théorie on applique la technique de calcul du degré superficiel de divergence de la sec. 4.6 et on trouve, *cf.* l'éq. (4.6.155) :

$$\omega(\mathbf{G}) = 4 - E_G - E_{gh} - \frac{3}{2} E_F. \quad (8.1.8)$$

où E_G , E_{gh} , et E_F sont respectivement le nombre de pattes externes de gluons, fantômes et fermions. On note que dans cette relation les fantômes sont considérés comme des bosons puisque du point de vue dimensionnel ils ont la même dimension que les gluons. Cependant cette formule n'est pas correcte à cause de la spécificité du couplage des fantômes au gluon : seul le fantôme "sortant" du vertex contribue un facteur d'impulsion à l'amplitude si bien que pour un fantôme "sortant" d'un diagramme le vertex correspondant ne contribuera pas un facteur d'impulsion interne et donc le degré de divergence du diagramme doit être réduit d'une unité par fantôme sortant dont le nombre est égal à $E_{gh}/2$. En revanche, pour un vertex impliquant des fantômes internes l'impulsion "sortante" est également interne et du point de vue dimensionnel le vertex avec fantômes se comporte comme le vertex à 3 gluons. La formule correcte sera donc pour QCD :

$$\boxed{\omega(\mathbf{G}) = 4 - E_G - \frac{3}{2}(E_F + E_{gh})}, \quad (8.1.9)$$

si bien que, finalement, les fantômes contribuent comme les quarks au degré de divergence d'un diagramme bien qu'ils aient la même dimension que les gluons ! On dénombre ainsi sept classes de

diagrammes en boucles potentiellement divergents :

- polarisation du gluon, polarisation du fantôme, self-énergie du quark ;
- vertex à 3 gluons, vertex gluon-fantôme-fantôme, vertex gluon-quark-quark ;
- vertex à 4 gluons.

Toutes ces topologies correspondent à des contre-termes dans le lagrangien ce qui suggère que la théorie peut être renormalisable.

On ne calculera que quelques contre-termes et s'assurera qu'ils peuvent être choisis pour annuler les divergences. On supposera, pour simplifier, que les quarks sont de masse nulle ($m_B = m = 0$, voir éq. (8.1.3), et il n'y aura pas lieu d'introduire Z_0). On commence par les termes les plus faciles à savoir le couplage gluon-fermion et qui permettra de définir le couplage renormalisé par

$$g_B = \frac{Z_{1F}}{Z_2 \sqrt{Z_3}} g \mu^\epsilon. \quad (8.1.10)$$

8.2 Calcul des Z_i

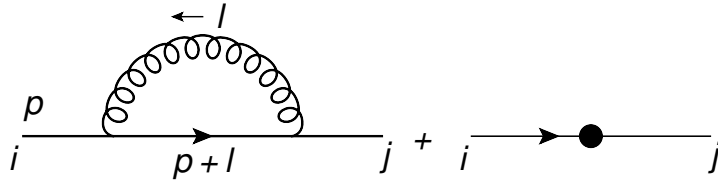
Le calcul est effectué en jauge covariante, le propagateur du gluon étant choisi de la forme

$$\delta^{ab} \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \left(-g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 + i\epsilon} \right)$$

où ξ dénote, dans la suite, le paramètre de jauge avec $\xi = 0$ en jauge de Landau et $\xi = 1$ en jauge de Feynman. Avec ce choix de jauge il faudra donc inclure les boucles de "fantômes". Les contre-termes seront définis dans le schéma $\overline{MS}$ ou éventuellement MS . Cela n'a pas de sens de définir le schéma ON , sur couche de masse, puisque les partons sont confinés dans des hadrons et sont donc hors couche.

8.2.1 Calcul de Z_2

Dans cette section nous évaluons le contre-terme de la fonction d'onde du quark. On rappelle que le contre-terme $\delta Z_0 = 0$ puisque la masse est supposée nulle. Les diagrammes à considérer sont similaires à ceux de QED avec essentiellement le facteur de couleur en plus :



$$-i \Sigma_{ji}(p) = -i \Sigma_{ji}^{\text{boucle}}(p) + i (Z_2 - 1) \delta_{ji} \not{p}$$

Le diagramme en boucle s'écrit :

$$-i \Sigma_{ji}^{\text{boucle}} = (-ig\mu^\epsilon)^2 < T_{jk}^a T_{ki}^a > \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \gamma_\mu \frac{i(\not{p} + \not{l})}{(p+l)^2 + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{i}{l^2 + i\epsilon} (-g^{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{l^\mu l^\nu}{l^2})$$

Dans une notation évidente on décompose le diagramme de polarisation du gluon en une série de termes

$$\Pi^{\alpha\beta,ab}(q) = \Pi_F^{\alpha\beta,ab}(q) + \Pi_g^{\alpha\beta,ab}(q) + \Pi_{gh}^{\alpha\beta,ab}(q) + \Pi_{4g}^{\alpha\beta,ab}(q) + (Z_3 - 1)\delta^{ab}(q^\alpha q^\beta - q^2 g^{\alpha\beta}). \quad (8.2.17)$$

• $\Pi_F^{\alpha\beta,ab}(\mathbf{q})$

Ce diagramme contient une boucle fermionique et du point de vue structure de Lorentz il est similaire au diagramme de polarisation du vide en QED. Aucun nouveau calcul n'est, en principe, nécessaire pour évaluer l'intégrale sur l'impulsion interne : il suffit de se reporter à l'éq. (4.1.17) et de choisir $m = 0$ avant le développement en ε ce qui permet de faire très facilement l'intégrale sur le paramètre de Feynman. Quant à la partie de couleur, elle est simplement

$$T_{ji}^a T_{ij}^b = \text{Tr } T^a T^b = \frac{\delta^{ab}}{2}.$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \Pi_F^{\alpha\beta,ab}(q) &= \left\langle \frac{\delta^{ab}}{2} \right\rangle \frac{g^2}{2\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx x^{1-\varepsilon} (1-x)^{1-\varepsilon} (q^\alpha q^\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) \\ &= \left\langle \frac{\delta^{ab}}{2} \right\rangle \frac{g^2}{2\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(4-2\varepsilon)} (q^\alpha q^\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) \\ &= \left\langle \frac{\delta^{ab}}{2} \right\rangle \frac{g^2}{12\pi^2} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \left(1 + \frac{5}{3}\varepsilon\right) (q^\alpha q^\beta - q^2 g^{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (8.2.18)$$

Chaque espèce de quark léger contribue à part égale (quarks de masse nulle) à la boucle fermionique et il faudra multiplier le résultat précédent par N_f , le nombre de saveurs considérées. Ainsi, on trouve finalement

$$\Pi_F^{\alpha\beta,ab}(q) = \left\langle N_f \frac{\delta^{ab}}{2} \right\rangle \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \Gamma(\varepsilon) \frac{4}{3} \left(1 + \frac{5}{3}\varepsilon\right) (q^\alpha q^\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) \quad (8.2.19)$$

• $\Pi_{4g}^{\alpha\beta,ab}(\mathbf{q})$

C'est le diagramme de type "tadpole", le seul qui fasse intervenir le couplage à quatre gluons. Il se trouve être égal à 0 en régularisation dimensionnelle. En effet, si on ignore le détail des facteurs de couleur, la partie de Lorentz est de la forme :

$$\Pi_{4g}^{\alpha\beta,ab}(q) \sim \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{a g^{\alpha\beta} + b k^\alpha k^\beta / k^2}{k^2 + i\epsilon} = \left(a + \frac{b}{4-2\varepsilon}\right) g^{\alpha\beta} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2 + i\epsilon},$$

d'après les eqs. (3.2.16), (3.2.21). On introduit maintenant une faible masse m pour évaluer l'intégrale

$$\lim_{m \rightarrow 0} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = m^{2-2\varepsilon} \Gamma(-1+\varepsilon)$$

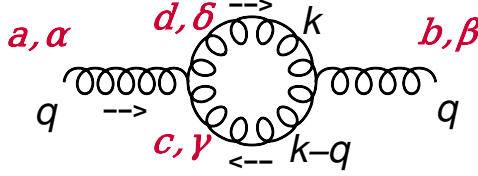
et on prend $m \rightarrow 0$ après l'intégration. On trouve donc bien

$$\Pi_{4g}^{\alpha\beta,ab}(q) = 0.$$

Remarque : Attention à l'ordre des limites ! Il faut d'abord prendre le régulateur infrarouge vers 0 ($m \rightarrow 0$) avant de prendre (le régulateur ultraviolet) $\varepsilon \rightarrow 0$.

• $\Pi_g^{\alpha\beta,ab}(q)$

Le calcul de l'intégrale sur l'impulsion est très long mais ne présente aucune difficulté majeure. Nous nous bornons à citer le départ et l'arrivée. Les notations sont définies dans la figure ci-dessous :



En lettres cela devient :

$$\begin{aligned}
 i\Pi_g^{\alpha\beta,ab}(q) &= (g\mu^\varepsilon)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \\
 &\times \left(f^{adc} \left[g^{\alpha\delta}(q+k)^\gamma + g^{\delta\gamma}(q-2k)^\alpha + g^{\gamma\alpha}(k-2q)^\delta \right] \right. \\
 &\quad \times \frac{-i\delta^{cc'}}{k^2 + i\epsilon} \left[g^{\delta\delta'} - (1-\xi) \frac{k^\delta k^{\delta'}}{k^2 + i\epsilon} \right] \\
 &\quad \times \frac{-i\delta^{dd'}}{(k-q)^2 + i\epsilon} \left[g^{\gamma\gamma'} - (1-\xi) \frac{((k-q)^\gamma (k-q)^{\gamma'})}{(k-q)^2 + i\epsilon} \right] \\
 &\quad \left. \times f^{c'd'b} \left[g^{\gamma'\delta'}(q-2k)^\beta + g^{\delta'\beta}(q+k)^{\gamma'} + g^{\beta\gamma'}(k-2q)^{\delta'} \right] \right)
 \end{aligned} \tag{8.2.20}$$

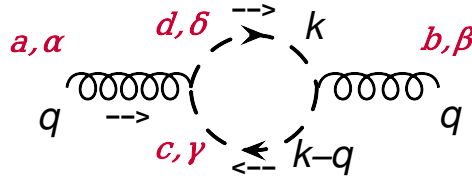
On note le facteur 1/2 global pour la symétrisation de particules identiques dans la boucle. L'intégrale sur l'impulsion interne et la variable de Feynman se font suivant les règles habituelles et on trouve, après un pénible calcul :

$$\begin{aligned}
 \Pi_g^{\alpha\beta,ab}(q) &= < N \delta^{ab} > \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \Gamma(\varepsilon) \\
 &\quad \frac{1}{1-2\varepsilon} \left[q^2 g^{\alpha\beta} \left(\frac{19}{12} + \frac{1}{18}\varepsilon \right) - q^\alpha q^\beta \left(\frac{11}{6} + \frac{1}{18}\varepsilon \right) \right. \\
 &\quad \left. + (1-\xi) \left(q^2 g^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta \right) \left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} (1-\xi)^2 \left(q^2 g^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta \right) \varepsilon \right]
 \end{aligned} \tag{8.2.21}$$

La contribution provenant de la boucle de gluons n'est pas transverse.

• $\Pi_{gh}^{\alpha\beta,ab}(q)$

L'application des règles de Feynman permet d'écrire facilement avec les conventions de la figure (attention aux signes et au facteur (-) associé à la boucle de fantômes !) :



En lettres on a :

$$i\Pi_{gh}^{\alpha\beta,ab}(q) = (-)(g\mu)^{2\varepsilon} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \left(f^{acd} k^\alpha \frac{-i\delta^{cc'}}{k^2 + i\epsilon} f^{bd'c'} (k-q)^\beta \frac{-i\delta^{dd'}}{(k-q)^2 + i\epsilon} \right) \quad (8.2.22)$$

Le calcul est beaucoup plus simple que le cas précédent. Après intégration sur x , on obtient :

$$\begin{aligned} \Pi_{gh}^{\alpha\beta,ab}(q) &= < N \delta^{ab} > \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \Gamma(\varepsilon) \\ &\quad \frac{1}{1-2\varepsilon} \left[q^2 g^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{18} \varepsilon \right) - q^\alpha q^\beta \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{18} \varepsilon \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.2.23)$$

• Résultat

Dans tous les résultats précédents apparaît le facteur $(\Gamma(1-\varepsilon))^2/\Gamma(1-2\varepsilon)$, typique de l'intégrale sur la variable de Feynman dans le cas d'une masse nulle. Il admet le développement en ε (voir éq. (3.2.20)),

$$\frac{(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} = 1 - \frac{\pi^2}{6} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (8.2.24)$$

et ce terme peut donc être remplacé par 1 car la divergence de toutes les contributions à la polarisation du gluon est d'ordre $1/\varepsilon$ puisque $\Gamma(\varepsilon) = \Gamma(1+\varepsilon)/\varepsilon$. Regroupant toutes les contributions en boucle à l'éq. (8.2.17) on peut les écrire :

$$\Pi_{\text{boucle}}^{\alpha\beta,ab}(q) = (\Pi_{\text{UV}} + \Pi_{\text{rest}}) < \delta^{ab} > (q^\alpha q^\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) \quad (8.2.25)$$

avec

$$\Pi_{\text{UV}} = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \left(\left(\frac{13}{6} - \frac{\xi}{2} \right) < N > -\frac{4}{3} < \frac{N_f}{2} > \right) \quad (8.2.26)$$

$$\Pi_{\text{rest}} = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(\left(\frac{22}{9} + \xi + \frac{1}{4}(1-\xi)^2 \right) < N > -\frac{20}{9} < \frac{N_f}{2} > \right) \quad (8.2.27)$$

Elles ont bien la forme transverse canonique. La constante de renormalisation dans le schéma $\overline{MS}$ compense la divergence UV :

$$\boxed{Z_3^{\overline{MS}} = 1 + c_3 \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon,} \quad (8.2.28)$$

avec

$$\boxed{c_3 = \left(\left(\frac{13}{6} - \frac{\xi}{2} \right) < N > -\frac{4}{3} < \frac{N_f}{2} > \right)} \quad (8.2.29)$$

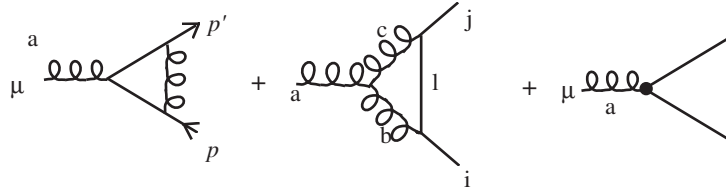
et

$$\boxed{\Pi^{\overline{MS}} = c_3 \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right) + \Pi_{\text{rest}}.} \quad (8.2.30)$$

Comme pour QED (voir sec. 4.1.1) la correction des termes de polarisation du gluon apportera un facteur multiplicatif au couplage $\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2) \rightarrow -\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2) \Pi^{\overline{MS}}$, mais contrairement à QED ce couplage recevra aussi des contributions du vertex et de la self-énergie du fermion.

8.2.3 Calcul de Z_{1F}

Il y a trois diagrammes :



$$-ig\mu^\varepsilon \Lambda_{ji}^{\alpha,a}(p,p')|_{\text{boucle}} + (-ig\mu^\varepsilon) (Z_{1F} - 1) T_{ji}^a \gamma^\alpha$$

Nous supposons les fermions externes sur couche de masse, $p^2 = p'^2 = 0$, mais le gluon virtuel $(p - p')^2 = q^2 \neq 0$.

- La première boucle (avec 2 fermions internes) est identique au vertex QED à part un facteur multiplicatif de couleur que l'on spécifiera plus bas. La partie divergente dans l'ultraviolet est donc en relation avec celle de la self-énergie du fermion (8.2.11)) et on pourrait avoir immédiatement sa contribution au facteur Z_{1F} . Cependant, il est intéressant d'évaluer ce diagramme plus précisément pour illustrer les complications associées aux divergences infrarouge et colinéaire. Cela peut être fait facilement, en jauge de Feynman, à partir de l'éq. (4.3.98) en posant $m = 0$ dans cette équation. Ignorant pour le moment les facteurs de couleur, il faut donc évaluer,

$$\Lambda_{ji}^{\alpha,a}(p;p')|_{\text{boucle, "QED"}} \approx -i (g\mu^\varepsilon)^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, 2y \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \gamma_\alpha \frac{[2 \frac{(1-\varepsilon)^2}{2-\varepsilon} l^2 - 2q^2(1-y) - 2q^2 y^2 x(1-x)]}{(l^2 + q^2 y^2 x(1-x) + i\epsilon)^3}. \quad (8.2.31)$$

Comme en QED, le premier terme du numérateur contient toutes les divergences ultraviolettes et on trouve

$$\Lambda_{ji}^{\alpha,a}|_{\text{boucle, "QED"}}^{\text{UV}} \approx \frac{g^2}{(4\pi)^2} \gamma_\alpha \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (1+\varepsilon), \quad (8.2.32)$$

qui est bien similaire à l'éq. (8.2.11) pour $\xi = 1$.

Le deuxième terme du numérateur de (8.2.31), $-2q^2(1-y)$, est régulier dans l'ultraviolet mais contient toutes les divergences infrarouge et colinéaire (voir éq. (4.3.103)). On trouve après intégration

sur l'impulsion de la boucle

$$\begin{aligned}\Lambda_{ji}^{\alpha,a}|_{\text{boucle, "QED"}}^{\text{ir}} &\approx \frac{g^2}{(4\pi)^2} \gamma_\alpha \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon 2 \Gamma(1+\varepsilon) \int_0^1 dy y^{-1-2\varepsilon} (1-y) \int_0^1 dx x^{-1-\varepsilon} (1-x)^{-1-\varepsilon} \\ &\approx -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \gamma_\alpha \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \Gamma(1+\varepsilon) \frac{(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left(\frac{2}{\varepsilon_{\text{ir}}^2} + \frac{4}{\varepsilon_{\text{ir}}} + 8 \right).\end{aligned}\quad (8.2.33)$$

On voit que les intégrales sur les paramètres de Feynman sont toutes deux divergentes quand $\varepsilon \rightarrow 0$. La divergence en $y = 0$ reflète la divergence infrarouge, $l \rightarrow 0$ du diagramme (voir la discussion autour de l'expression éq. (4.3.105)) tandis que celles en $x = 0$ et $x = 1$ sont associées à la divergence de masse $m = 0$. Il suffit de se reporter à l'éq. (4.3.103) pour voir que l'intégrale I_1 , coefficient de $1/\varepsilon_{\text{ir}}$ n'est pas définie quand $m = 0$. Pour lui donner un sens il faut évaluer les expressions avant de faire le développement en ε , comme nous l'avons fait dans l'équation ci-dessus, ce qui mène à un pôle en ε (voir aussi éq. (4.3.102)). On utilise le même symbole ir pour noter l'origine des divergences infrarouge et colinéaire mais on rappelle que ce n'est qu'un mnémonique et l'on a bien $\varepsilon = \varepsilon_{\text{ir}}$.

Le troisième terme du numérateur de (8.2.31), $-2q^2 y^2 x(1-x)$ est régulier et s'évalue facilement :

$$\Lambda_{ji}^{\alpha,a}|_{\text{boucle, "QED"}}^{\text{régulier}} \approx -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \gamma_\alpha \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon.$$

Il reste maintenant à introduire le facteur de couleur qui s'écrit :

$$\begin{aligned}(T_{jl}^b T_{lk}^a T_{ki}^b) &= (T_b T_a T_b)_{ji} = \left(T^b T^b T^a + i f^{abc} T^b T^c \right)_{ji} \\ &= c_F T_{ji}^a + \frac{i}{2} f^{abc} \left([T^b, T^c] + \{T^b, T^c\} \right)_{ji} \\ &= c_F T_{ji}^a - \frac{1}{2} f^{abc} f^{bce} T_{ji}^e \\ &= \left(c_F - \frac{N}{2} \right) T_{ji}^a.\end{aligned}\quad (8.2.34)$$

Finalement, rassemblant tout on trouve que, en jauge de Feynman, la contribution au vertex de la boucle de type QED est :

$$\begin{aligned}\Lambda_{ji}^{\alpha,a}(p, p')|_{\text{boucle, "QED"}} &= \left(c_F - \frac{N}{2} \right) T_{ji}^a > \frac{g^2}{(4\pi)^2} \gamma_\alpha \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \Gamma(1+\varepsilon) \\ &\quad \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) - \left(\frac{2}{\varepsilon_{\text{ir}}^2} + \frac{4}{\varepsilon_{\text{ir}}} + 9 \right) \right].\end{aligned}\quad (8.2.35)$$

On remarque qu'en QCD, même si les divergences ultraviolettes du vertex et de la self-énergie sont identiques, elles ne se compensent pas à cause du facteur de couleur différent pour les deux diagrammes : $< c_F >$ pour la self comparé à $< c_F - \frac{N}{2} >$ pour le vertex de type QED.

- La seconde boucle (avec 2 gluons internes) a le facteur de couleur

$$\begin{aligned}
 f^{abc} T_{jl}^b T_{li}^c &= f^{abc} (T^b T^c)_{ji} = f^{abc} \frac{1}{2} [T^b, T^c]_{ji} \\
 &= \frac{1}{2} f^{abc} i f^{bcd} T_{ji}^d \\
 &= \frac{i}{2} c_A T_{ji}^a = \frac{i}{2} N T_{ji}^a
 \end{aligned} \tag{8.2.36}$$

Nous ne détaillerons pas le calcul fastidieux de ce diagramme mais citerons seulement le résultat du vertex complet (c'est à dire comprenant les deux diagrammes en boucle), en jauge covariante. On peut l'exprimer sous la forme :

$$\Lambda_{ji}^{\alpha,a}(p;p')|_{\text{boucle}} = (\Lambda_{UV} + \Lambda_{\text{rest}}) T_{ji}^a \gamma_\alpha \tag{8.2.37}$$

avec

$$\Lambda_{UV} = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \left((c_F - \frac{N}{2}) \xi + \frac{3}{4} N(1+\xi) \right) \tag{8.2.38}$$

$$\Lambda_{\text{rest}} = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \Gamma(1+\varepsilon) \left(\frac{a_2}{\varepsilon_{\text{ir}}^2} + \frac{a_1}{\varepsilon_{\text{ir}}} + a_0 \right) \tag{8.2.39}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -2 \left(c_F - \frac{N}{2} \right) \\
 a_1 &= -(3+\xi) \left(c_F - \frac{N}{2} \right) - 2N \\
 a_0 &= -8 \left(c_F - \frac{N}{2} \right) - N \left(1 - \frac{1}{2}(1-\xi) + \frac{1}{4}(1-\xi)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{8.2.40}$$

Concernant les pôles en ε_{ir} seul le diagramme de type QED contribue au double pôle (singularité infrarouge et singularité de masse) puisqu'il est associé au facteur de couleur $(c_F - N/2)$. Le vertex à trois gluons est, en effet, moins divergent dans l'infrarouge puisque le couplage correspondant contient un facteur d'impulsion interne supplémentaire suffisant pour compenser la singularité infrarouge, de sorte qu'il ne survit qu'une singularité de masse. D'autre part on note que le facteur $(\Gamma(1-\varepsilon))^2/\Gamma(1-2\varepsilon)$ peut être ignoré dans Λ_{UV} , du fait de l'éq. (8.2.24), et de même dans Λ_{rest} pourvu que l'on fasse $a_0 \rightarrow a_0 - a_2\pi^2/6$.

• Résultat

La correction à une boucle au vertex étant :

$$\Lambda_{ji}^{\alpha,a}(p,p') = (\Lambda_{UV} + \Lambda_{\text{rest}} + Z_{1F} - 1) T_{ji}^a \gamma^\alpha, \tag{8.2.41}$$

le choix

$$\boxed{Z_{1F}^{\overline{MS}} = 1 + c_1 \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon} \tag{8.2.42}$$

avec

$$c_1 = -(\langle c_F \rangle \xi + \langle N \rangle \frac{3 + \xi}{4}), \quad (8.2.43)$$

annulera la divergence et il restera

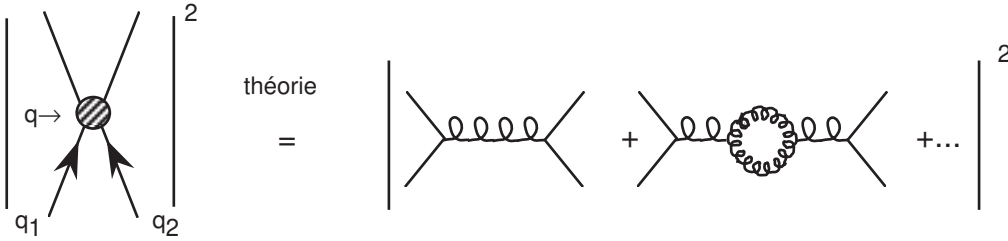
$$\Lambda^{\overline{MS}} = c_1 \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right) + \Lambda_{\text{rest}} \quad (8.2.44)$$

qui est seulement un facteur multiplicatif au vertex $T_{ji}^a \gamma^\alpha$ à l'ordre de Born. Les termes divergents d'origine infrarouge restant dans l'expression du vertex se compenseront dans le calcul d'une observable physique comme on l'a vu dans le chapitre 5 et ceux d'origine colinéaire seront traités dans le chapitre suivant.

De fastidieux calculs similaires à ceux que l'on vient de discuter permettront de déterminer Z_1 , $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_3$ et on peut vérifier les égalités (8.1.6), d'où il s'ensuit, d'après les éqs. (8.1.3), que l'on peut identifier les couplages g , $\tilde{g}$, $\tilde{\tilde{g}}$.

• Application

On considère la diffusion *quark* – *quark'* à grands transferts d'énergie $t = -q^2$. Les diagrammes virtuels à considérer aux deux premiers ordres des perturbations sont ¹



Comme on l'a vu, ces corrections ne sont que des facteurs multiplicatifs : $\Sigma^{\overline{MS}}/2$ pour chaque spineur externe, $\Lambda^{\overline{MS}}$ pour chaque vertex, $-\Pi^{\overline{MS}}$ pour le couplage $\alpha_s(\mu^2)$. L'amplitude de diffusion, corrigée des termes virtuels, est donc aux deux premiers ordres de la théorie des perturbations :

$$\begin{aligned} 4\pi \alpha_s(\mu^2) \mathcal{M}^{q_1 q'_2 \rightarrow q_3 q'_4} &= 4\pi \alpha_s(\mu^2) \left\{ 1 + 2\Sigma^{\overline{MS}} + 2\Lambda^{\overline{MS}} - \Pi^{\overline{MS}} \right\} \mathcal{M}_0^{q_1 q'_2 \rightarrow q_3 q'_4} \\ &= 4\pi \alpha_s(\mu^2) \left\{ 1 + 2\Sigma^{\overline{MS}} + 2c_1 \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right) + 2\Lambda_{\text{rest}} \right. \\ &\quad \left. - c_3 \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right) - \Pi_{\text{rest}} \right\} \mathcal{M}_0^{q_1 q'_2 \rightarrow q_3 q'_4}. \end{aligned} \quad (8.2.45)$$

Dans cette équation, $\mathcal{M}_0^{q_1 q'_2 \rightarrow q_3 q'_4}$ dénote l'amplitude à l'approximation de Born. Si on garde μ^2 fixe et que l'on s'intéresse aux hautes énergies ($-q^2$ grand) on peut avoir de grandes corrections logarithmiques. Un choix astucieux consiste à prendre $\mu^2 = -q^2$ de sorte que tous les grands logarithmes disparaissent et on aura pour l'élément de matrice

$$4\pi \alpha_s(-q^2) \left\{ 1 + \mathcal{O}(\alpha_s(-q^2)) \right\} \mathcal{M}_0^{q_1 q'_2 \rightarrow q_3 q'_4} \quad (8.2.46)$$

1. On ignore les diagrammes avec échange de deux gluons entre q_1 et q_2 qui n'ont pas de divergences ultraviolettes.

Dans l'*approximation des logarithmes dominants* (*leading logarithm approximation*), notée LO, on ne garde que le premier terme de l'équation, c'est à dire le terme de Born mais avec le couplage fort évalué à l'échelle caractéristique du processus. La section efficace calculée, en incluant l'effet des corrections à une boucle, a alors exactement la même expression que celle calculée en ne considérant que les diagrammes d'ordre le plus bas : la seule différence entre les deux expressions est que, dans le premier cas, le couplage dépend de l'échelle caractéristique du processus dur étudié qui est ici l'impulsion de transfert de la réaction. Si on travaille à l'approximation suivante (*next-to-leading logarithmic approximation*), dite NLO, le terme correctif, d'ordre α_s^2 , contient en fait des divergences infrarouges et colinéaires : les pôles d'origine infrarouge seront compensées par des termes similaires venant des diagrammes réels lorsque l'on construira la section efficace, comme on l'a vu au chapitre 5 ou comme on le verra sur des exemples dans les chapitres suivants. Les divergence colinéaires doivent, suivant les observables, se compenser ou bien être "factorisées" dans des fonctions de structure.

8.2.4 Le couplage mobile α_s et application

Revenant à la première des éqs. (8.1.3) reliant le couplage nu au couplage renormalisé, on a la relation :

$$g_B = \frac{Z_{1F}}{Z_2 Z_3^{1/2}} g(\mu^2) \mu^\varepsilon. \quad (8.2.47)$$

Reprenant les notations de la section 4.4 et définissant $\alpha_B = g_B^2/4\pi$ et $\alpha_s = g^2/4\pi$,

$$\alpha_B = \frac{Z_{1F}^2}{Z_2^2 Z_3} \alpha_s(\mu^2) \mu^{2\varepsilon} = Z_\alpha \alpha_s(\mu^2) \mu^{2\varepsilon} \quad (8.2.48)$$

avec

$$Z_\alpha = \left(1 + \frac{c_\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon} \alpha_s(\mu^2)\right) \quad (8.2.49)$$

où $c_\alpha(\varepsilon)$ est calculé à partir des éqs. (8.2.15), (8.2.29), (8.2.43) :

$$c_\alpha(\varepsilon) = \frac{2c_1 - 2c_2 - c_3}{4\pi} \Gamma(1 + \varepsilon) (4\pi)^\varepsilon = -\frac{11N - 2N_f}{12\pi} \Gamma(1 + \varepsilon) (4\pi)^\varepsilon. \quad (8.2.50)$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer l'évolution du couplage de QCD et de prouver la propriété de liberté asymptotique invoquant l'éq. (4.4.133). On trouve :

$$\boxed{\begin{aligned} \beta(\alpha_s) &= c_\alpha(0) \alpha_s^2(\mu^2) + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \\ &= -\frac{11N - 2N_f}{12\pi} \alpha_s^2(\mu^2) + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \end{aligned}} \quad (8.2.51)$$

et d'après l'éq. (4.4.134) :

$$\boxed{\alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{1 + \frac{(11N - 2N_f)}{12\pi} \alpha_s(\mu_0^2) \ln(\mu^2/\mu_0^2)} + \mathcal{O}(\alpha_s^3 \ln(\mu^2/\mu_0^2))}. \quad (8.2.52)$$

Le couplage décroît quand μ croît si $11N - 2N_f > 0$, c'est à dire si le nombre N_f de saveurs de quarks est inférieur à 17 : dans ces conditions la théorie est dite asymptotiquement libre.

• Remarques

On retrouve le résultat pour QED si $N = 0$ (pas de couleur, théorie abélienne, pas de couplage entre bosons de jauge) et $N_f < \frac{1}{2} \Rightarrow 1$ (voir le calcul de facteur de couleur de la boucle fermionique de $\Pi_F^{\alpha\beta,ab}$).

Le terme proportionnel à N dans l'équation ci-dessus, qui vient des termes "non-abéliens" avec couplage à trois gluons, est responsable de la propriété de liberté asymptotique (il est positif) tandis que le terme dépendant de N_f , qui vient uniquement de la boucle fermionique, est négatif comme en QED. On peut se rappeler le signe relatif entre ces deux types de contributions en se souvenant que les boucles de fermions ont un facteur (-1) supplémentaire dû à la statistique de Fermi-Dirac.

On remarque que $\beta(\alpha_s)$ et par conséquent α_s ne dépendent pas du paramètre de jauge ξ . Ce résultat est vrai à tous les ordres de la théorie des perturbations comme on le montre en section 12.4.

La signification physique de l'équation (8.2.52) est la suivante : pour faire les calculs à une boucle en QCD nous avons dû choisir un schéma de régularisation (régularisation dimensionnelle) ce qui a introduit une échelle de masse arbitraire μ ; pour faire des prédictions que l'on veut comparer à l'expérience il faudra choisir une valeur particulière de μ , soit μ_0 , ainsi que la valeur des impulsions du processus que l'on considère, et choisir la valeur numérique $\alpha_s(\mu_0)$ de façon que les expressions mathématiques reproduisent le résultat expérimental. La relation éq. (8.2.52) exprime la valeur que doit avoir le couplage $\alpha_s(\mu)$ de la théorie renormalisée à l'échelle μ , pour que les prédictions de cette théorie soient identiques aux prédictions de la théorie renormalisée à μ_0 . En d'autres termes, la théorie renormalisée à μ_0 et celle renormalisée à μ_1 seront équivalentes au sens perturbatif, si les couplages renormalisés $\alpha_s(\mu_0^2)$ et $\alpha_s(\mu_1^2)$ sont reliés par l'éq. (8.2.52).

8.2.5 Définition de Λ_{QCD}

Le couple de valeurs $(\mu, \alpha_s(\mu))$ ne correspond pas à deux variables indépendantes mais à une seule puisqu'elles sont contraintes par une relation pour pouvoir décrire la même physique quelque soit μ . Mathématiquement cela s'exprime par le fait que l'on peut introduire une échelle de masse unique qui déterminera complètement le couplage mobile. En effet, on peut écrire l'équation (8.2.52) :

$$\begin{aligned} \alpha_s(\mu^2) &= \frac{1}{\frac{1}{\alpha_s(\mu_0^2)} + \frac{11N-2N_f}{12\pi} \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}} \\ &= \frac{12\pi}{(11N - 2N_f) \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}}, \end{aligned} \quad (8.2.53)$$

avec

$$\boxed{\Lambda^2 = \mu_0^2 \exp \left(-\frac{12\pi}{(11N - 2N_f) \alpha_s(\mu_0^2)} \right)}. \quad (8.2.54)$$

Λ est la constante fondamentale de QCD que l'on détermine expérimentalement. Dans l'approximation des logarithmes dominants on écrit

$$\boxed{\alpha_s(\mu^2) = \frac{1}{b \ln(\mu^2/\Lambda^2)} \quad \text{avec} \quad b = -c_\alpha(0) = \frac{11N - 2N_f}{12\pi}} \quad (8.2.55)$$

L'échelle de masse Λ contrôle l'ordre de grandeur des interactions fortes mais sa valeur numérique, exprimée en MeV ou GeV, dépend du schéma de renormalisation dans lequel on travaille. On va prouver ceci en comparant la valeur de Λ dans les schémas MS et $\overline{MS}$. Revenant à la relation entre couplages nu et renormalisé on a,

$$\begin{aligned} \alpha_B &= Z_\alpha^{\overline{MS}} \alpha_{\overline{MS}}(\mu^2) \mu^{2\varepsilon} \\ &= Z_\alpha^{MS} \alpha_{MS}(\mu^2) \mu^{2\varepsilon} \end{aligned} \quad (8.2.56)$$

avec pour $Z_\alpha^{\overline{MS}}$ (voir les éqs. (8.2.50) et (8.2.52)),

$$Z_\alpha^{\overline{MS}} = 1 + \alpha_{\overline{MS}}(\mu^2) c_\alpha \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right), \quad (8.2.57)$$

tandis que pour le schéma MS on aura :

$$Z_\alpha^{MS} = 1 + \alpha_{MS}(\mu^2) c_\alpha \left(\frac{1}{\varepsilon} \right), \quad (8.2.58)$$

la valeur de c_α étant, par définition, commune aux deux cas. On en tire immédiatement :

$$\begin{aligned} \alpha_{MS}(\mu^2) &= \frac{Z_\alpha^{\overline{MS}}}{Z_\alpha^{MS}} \alpha_{\overline{MS}}(\mu^2) \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha_{MS}(\mu^2)} &= \frac{1}{\alpha_{\overline{MS}}(\mu^2)} (1 + \alpha_{\overline{MS}}(\mu^2) b (\ln 4\pi - \gamma)) + \mathcal{O}(\alpha_{\overline{MS}}(\mu^3)). \end{aligned} \quad (8.2.59)$$

Utilisant la forme $\alpha(\mu^2) = 1/b \ln(\mu^2/\Lambda^2)$ pour chacun des schémas on obtient facilement la relation

$$\Lambda_{\overline{MS}}^2 \approx 4\pi e^{-\gamma} \Lambda_{MS}^2. \quad (8.2.60)$$

Cette relation est nécessaire pour que les prédictions physiques dans le schéma MS soient identiques à celles dans le schéma $\overline{MS}$.

8.2.6 Au-delà des logarithmes dominants

Techniquement parlant, on note que la distinction entre schéma MS et schéma $\overline{MS}$ ne peut se faire que si on travaille dans l'approximation "au-delà des logarithmes dominants" : en effet à l'approximation des logarithmes dominants, par convention, on ne distingue pas $\ln(\mu^2/\Lambda_{\overline{MS}}^2)$ de $\ln(\mu^2/\Lambda_{MS}^2)$ et les deux schémas sont équivalents.

La fonction $\beta(\alpha_s)$ de Gell-Mann-Low admet un développement perturbatif de la forme :

$$\beta(\alpha_s) = \frac{\mu^2 d\alpha_s(\mu^2)}{d\mu^2} = -b \alpha_s^2 (1 + b' \alpha_s + b'' \alpha_s^2 + b''' \alpha_s^3 + \dots). \quad (8.2.61)$$

En QCD ce développement est connu jusqu'à 5 boucles², c'est à dire jusqu'au coefficient b'''' . On cite la valeur des deux premiers :

$$b = \frac{11N - 2N_f}{12\pi} ; \quad b' = \frac{17N^2 - N_f(5N + 3c_F)}{2\pi(11N - 2N_f)}. \quad (8.2.62)$$

Le paramètre b étant défini comme $b = -c_\alpha(0)$ de l'éq. (8.2.50) et intégrant l'équation ci-dessus on obtient :

$$b \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2} = \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} - \frac{1}{\alpha_s(\mu_0^2)} + b' \ln \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\alpha_s(\mu_0^2)} - b' \ln \frac{1 + b' \alpha_s(\mu^2)}{1 + b' \alpha_s(\mu_0^2)}. \quad (8.2.63)$$

Regroupant tous les termes du membre de droite en $\alpha_s(\mu_0^2)$, qui dépendent des conditions initiales, avec le terme $b(\ln \mu^2 / \ln \mu_0^2)$ du membre de gauche, on introduit $\Lambda_{\overline{MS}}^2$ tel que

$$b \ln \frac{\mu^2}{\Lambda_{\overline{MS}}^2} \sim \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} + b' \ln \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + b' \alpha_s(\mu^2)}, \quad (8.2.64)$$

définition valable à l'approximation "au-delà des logarithmes dominants" (NLO). On peut alors obtenir $\alpha_s(\mu^2)$ en fonction de $t = \ln(\mu^2 / \Lambda_{\overline{MS}}^2)$ en inversant numériquement cette équation. Une expression analytique approchée est obtenue en résolvant l'équation perturbativement et itérativement :

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{1}{bt} \left(1 - \frac{b'}{bt} \ln t + \frac{b'^2}{b^2 t^2} (\ln^2 t - \ln t - 1) + \frac{b''}{b^2 t^2} \right), \quad (8.2.65)$$

où on s'est payé le luxe d'inclure la contribution du calcul à trois boucles proportionnelle à b'' . Cette expression donne la dépendance du couplage en fonction de la masse μ à l'approximation NNLO (*next-to-next-to-leading logarithm*). A l'approximation NLO seuls les deux premiers termes sont gardés.

8.2.7 Résultats

De très nombreuses expériences ont été réalisées qui permettent de mesurer $\Lambda_{\overline{MS}}$. Une compilation³ des données expérimentales donne, pour cinq saveurs actives ($N_f = 5$) à l'approximation NNLO :

$$\boxed{\Lambda_{\overline{MS}} = 210 \pm 11 \text{ MeV}}, \quad (8.2.66)$$

ou, de façon équivalente, il est devenu usuel de donner la valeur de α_s à la masse du Z :

$$\boxed{\alpha_s(M_Z^2) = 0,1181 \pm 0,0011}. \quad (8.2.67)$$

Comme le montre la figure 8.1, ce résultat est fondé des expériences couvrant un très grand domaine d'énergie, du GeV à l'énergie du LHC, et une variété d'observables : inélastique profond, diffusion $e^+ e^-$, collisions hadroniques, désintégrations de particules lourdes, désintégration du lepton τ .

2. P.A. Baikov, K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn, Phys. Rev.Lett. **118** (2017) 082002, arXiv : 1606.08659 [hep-ph] ; F. Herzog, B. Ruijl, T. Ueda, J.A.M. Vermaseren, A. Vogt, JHEP **1702** (2017) 090, arXiv : 1701.01404 [hep-ph] ; T. Luthe, A. Maier, P. Marquard, Y. Schroder, JHEP **1703** (2017) 020, arXiv : 1701.07068 [hep-ph] .

3. C. Patrignani *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. **C40** 100001 (2016).

On peut comparer la situation en QCD avec celle en QED. La constante de structure fine de QED $\alpha = 1/137,035999074$ pourrait paraître plus fondamentale que celle de QCD $\alpha_s(M_z^2)|_{\overline{MS}} = 1/8,467$ pour laquelle il faut spécifier le schéma de renormalisation ainsi qu'une valeur de masse. En fait il n'en n'est rien et la situation est identique dans les deux cas (hormis la précision des mesures expérimentales !). En effet, la valeur de α ci-dessus est donnée, de façon traditionnelle dans le schéma de renormalisation sur couche de masse (schéma ON de la section 4) dans la limite où l'échelle de masse $\rightarrow 0$. Comme c'était, pendant longtemps, le seul schéma de renormalisation utilisé en QED on "oubliait" de le préciser. Dans le schéma $\overline{MS}$ la valeur de α serait différente et elle peut être calculée avec les formules de la section 4. La différence avec QCD réside dans le fait qu'il n'est pas possible de définir un schéma ON en chromodynamique car les quarks et les gluons étant confinés dans les hadrons ils ne sont pas sur leur couche de masse. D'autre part il n'est pas possible de prendre la limite de masse nulle pour l'échelle de renormalisation car la théorie perturbative ne serait plus définie puisqu'alors le couplage $\rightarrow \infty$.

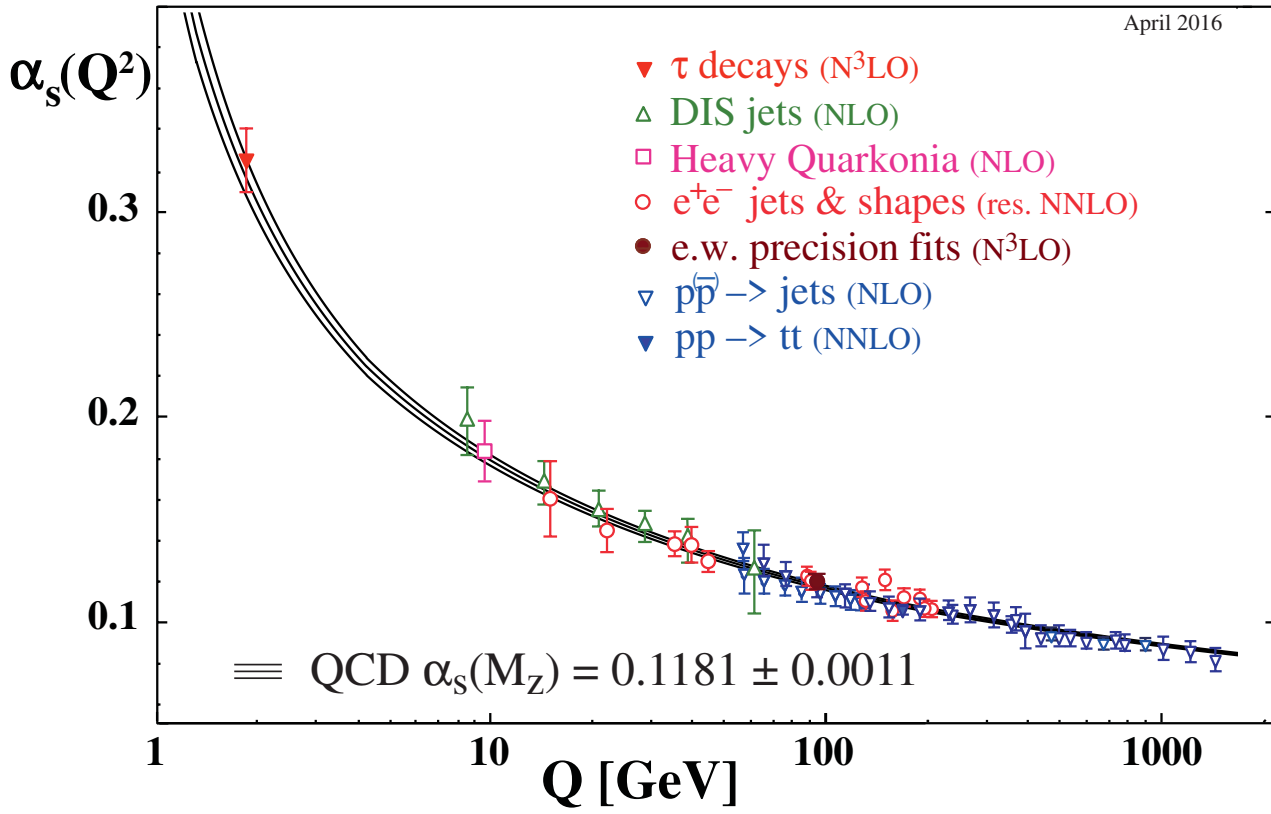


FIGURE 8.1 – *Compilation des données expérimentales de α_s , C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C40 100001 (2016).*