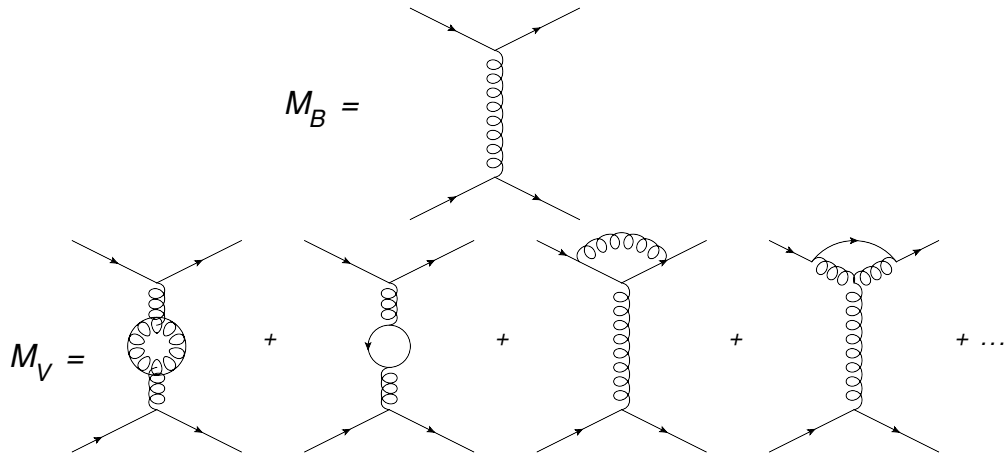


## Chapitre 9

# Violations de l'invariance d'échelle

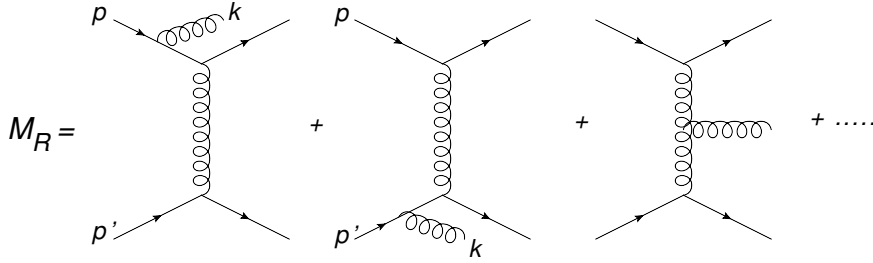
Dans la discussion précédente nous n'avons étudié que les diagrammes en boucles : polarisation du vide, self-énergie du fermion et correction au vertex. Nous avons extrait de ces diagrammes la partie divergente dans l'ultraviolet ( $\sim 1/\varepsilon + \ln 4\pi - \gamma$ ) et nous avons vu que, par la renormalisation, on pouvait absorber ces singularités et définir un couplage renormalisé dépendant de l'échelle d'énergie du processus étudié. On a vu que si on considère les diagrammes suivants de la diffusion  $qq \rightarrow qq$  à grande impulsion de transfert [ $Q = -\sqrt{-q^2}$ ] :



leur contribution à la section efficace est de la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_V &\approx |\mathcal{M}_B + \mathcal{M}_V|^2 = |\mathcal{M}_B|^2 + 2\text{Re} \mathcal{M}_B \mathcal{M}_V^* + |\mathcal{M}_V|^2 \\ &= \alpha_{\overline{MS}}^2(Q^2) (|A_B|^2 + 2 \alpha_{\overline{MS}}(Q^2) \text{Re} A_B B_V) + \mathcal{O}(\alpha^4) \end{aligned}$$

si l'on a effectué la renormalisation dans le schéma  $\overline{MS}$ , et la contribution  $B_V$  des diagrammes en boucle n'a plus de singularité ultraviolette. A ce point, cependant, le calcul de la section efficace n'est pas complet, car au même ordre contribuent aussi les diagrammes "réels" correspondant à la production de quanta sur couche de masse ("réels"). Ce sont les processus du type 2 corps  $\rightarrow$  3 corps tels que :



dont la contribution à  $\sigma$  est de la forme  $\sigma_R \sim |\mathcal{M}_R|^2$  qui est d'ordre  $\alpha_{\overline{MS}}^3$ . Ces termes ne peuvent avoir de divergences ultraviolettes puisque l'énergie des partons finals est limitée par l'énergie initiale finie, en particulier l'énergie du gluon émis est  $k < \sqrt{s}$ . En revanche, ils possèdent des "divergences colinéaires" ou "singularités de masse" ainsi que des "divergences infrarouges". De façon similaire à la diffusion discutée en sec. 5.3, pour chaque gluon de vecteur polarisation  $\epsilon(k)$  émis par un quark d'impulsion  $p$  on a un facteur  $gp \cdot \epsilon(k) / p \cdot k$  (éq. (5.3.3)) ce qui contribue au carré de l'amplitude (interférence des deux premiers diagrammes ci-dessus) un facteur (voir l'éq. (5.3.6)) :

$$g^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k} \frac{2 p \cdot p'}{p \cdot k p' \cdot k}. \quad (9.0.1)$$

On suppose une petite masse aux quarks et on se place dans le centre de masse quark-quark. La cinématique est :

$$p = (\omega, 0, 0, p), \quad p' = (\omega, 0, 0, -p), \quad \omega = \frac{\sqrt{s}}{2}, \quad p \approx \omega - \frac{m^2}{\sqrt{s}}; \quad k = (k, k \sin \theta, 0, k \cos \theta)$$

L'expression ci-dessus devient :

$$\frac{g^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \int_{\lambda}^{\sqrt{s}} \frac{k^2 dk}{k} \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{s}{k^2 (\omega - p \cos \theta) (\omega + p \cos \theta)} \quad (9.0.2)$$

où on a introduit un cut-off  $\lambda$  pour régulariser l'intégrale sur l'impulsion  $k$  dans l'infrarouge. Toutes les intégrales se font trivialement pour trouver :

$$\frac{g^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{s}}{\lambda} \frac{s}{\omega p} \ln \frac{\omega + p}{\omega - p} \approx \frac{g^2}{(2\pi)^2} \ln \frac{s}{\lambda^2} \ln \frac{s}{m^2} \quad (9.0.3)$$

Il apparaît que :

- Le facteur  $\ln \frac{s}{m^2}$ , résulte de l'intégrale sur  $\cos \theta$  : il diverge quand  $m \rightarrow 0$ , comme on le suppose en QCD, et la divergence vient de la configuration où le gluon est colinéaire au quark qui émet ce gluon ( $\cos \theta = \pm 1$ ). On parle alors de "singularité de masse" ou de "singularité colinéaire".
- Le facteur  $\ln \frac{s}{\lambda^2}$  reflète la divergence infrarouge, c'est-à-dire la singularité de  $|\mathcal{M}_R|^2$  quand le gluon émis devient "mou". Cette singularité est caractéristique de l'émission de boson de jauge et il n'y a pas de singularité infrarouge associée à l'émission de quark d'impulsion nulle.

On rappelle que les divergences colinéaires et infrarouges apparaissent aussi dans le calcul des boucles, en particulier self-énergie d'un fermion et correction au vertex, car les intégrales correspondantes impliquent de prendre en compte la région où le photon ou le gluon virtuel devient mou.

En général la structure d'un calcul perturbatif aux deux premiers ordres, avant renormalisation, est la suivante, dans le cas où on introduit  $\Lambda_{UV}$  régulateur ultraviolet,  $\lambda$  régulateur I.R.,  $m = m_{\text{quark}}$  régulateur colinéaire ( $F$  symbolise les fonctions de structure et  $\otimes$  la convolution avec les sections partoniques),

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \alpha^p F \otimes \hat{\sigma} \\ \sigma_V &= \alpha^{p+1} F \otimes \left[ \hat{\sigma} \left( a \ln \frac{\Lambda_{UV}}{Q} + \text{contre-termes} + b_1 \ln \frac{Q}{\lambda} \ln \frac{Q}{m} + b_2 \ln \frac{Q}{\lambda} + b_3 \ln \frac{Q}{m} \right) + c \right] \\ \sigma_R &= \alpha^{p+1} F \otimes \left[ \hat{\sigma} \left( b'_1 \ln \frac{Q}{\lambda} \ln \frac{Q}{m} + b'_2 \ln \frac{Q}{\lambda} + b'_3 \ln \frac{Q}{m} \right) + c' \right]\end{aligned}$$

où la première ligne est la section efficace dans l'approximation de Born, c'est à dire à l'ordre le plus bas en  $\alpha$  (ici d'ordre  $p$ ), tandis que les deux lignes suivantes symbolisent respectivement la contribution des diagrammes virtuels et réels d'ordre supérieur. On peut noter qu'il n'y a pas de terme tel que  $\ln \Lambda_{UV} \ln \lambda$  ou  $\ln \Lambda_{UV} \ln m$  car les divergences viennent de régions disjointes de l'espace de phase. Par exemple,

$$\int_{\lambda}^{\Lambda_{UV}} \frac{dk}{k} = \ln \frac{\Lambda_{UV}}{Q} + \ln \frac{Q}{\lambda}.$$

On peut prouver que

$$b_1 + b'_1 = b_2 + b'_2 = 0.$$

C'est le théorème de Lee-Kinoshita-Nauenberg déjà introduit au chapitre 5 : dans le calcul d'un observable les divergences infrarouges se compensent entre diagrammes réels et virtuels. Donc, après renormalisation, et après compensation des singularités I.R. on a

$$\sigma = \alpha_{\overline{MS}}^p(Q^2) F \otimes \left[ \hat{\sigma} \left( 1 + \alpha_{\overline{MS}}(Q^2)(b_3 + b'_3) \ln \frac{Q}{m} \right) + \alpha_{\overline{MS}}(Q^2)(c + c') \right]$$

où on a effectué la renormalisation dans le schéma  $\overline{MS}$  et on a choisi  $Q$  comme échelle de renormalisation. De façon similaire à la renormalisation, on verra que l'on peut éliminer de cette expression les divergences colinéaires par une redéfinition des fonctions de structure qui acquièrent alors une dépendance en une variable de masse, ici  $Q$ . Ainsi définissant la fonction :

$$F_{\overline{MS}}(Q^2) = F \otimes \left[ 1 + \alpha_{\overline{MS}}(Q^2)(b_3 + b'_3) \ln \frac{Q}{m} \right]$$

la section efficace hadronique s'écrit alors simplement :

$$\sigma = \alpha_{\overline{MS}}^p(Q^2) F_{\overline{MS}}(Q^2) \otimes [\hat{\sigma} + \alpha_{\overline{MS}}(Q^2)(c + c')] \quad (9.0.4)$$

On dit que les fonctions de structure ainsi définies violent l'invariance d'échelle. Comme dans le cas du couplage mobile, on pourra définir  $F(Q^2)$  de plusieurs façons (par exemple,  $F_{\overline{MS}}(Q^2)$ ,  $F_{MS}(Q^2)$ ,

$F_{DIS}(Q^2)$ , ...) suivant les termes finis que l'on inclut dans la relation entre  $F$  et  $F_i(Q^2)$ . Cette propriété, qui consiste à définir  $F_i(Q^2)$  à partir de  $F$  est une illustration du théorème de factorisation : les divergences de masse peuvent être factorisées du sous-processus partonique dur (c'est-à-dire de la série  $\hat{\sigma} + \alpha_{\overline{MS}}(c + c') + \dots$ ) et associées aux pattes externes modifiant ainsi les distributions des partons dans les hadrons. Ce théorème a d'abord été prouvé aux deux premiers ordres de la théorie par H.D. Politzer<sup>1</sup> puis, à tous les ordres, par plusieurs<sup>2</sup> groupes<sup>3</sup>.

Dans les calculs effectifs on utilisera évidemment la régularisation dimensionnelle pour extraire les divergences infrarouges et colinéaires. La formule éq. (9.0.1) devient alors :

$$g^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k} \frac{2 p \cdot p'}{p \cdot k p' \cdot k} \rightarrow (g\mu^\varepsilon)^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n-1} 2k} \frac{2 p \cdot p'}{p \cdot k p' \cdot k}.$$

Cette dernière intégrale s'évalue facilement en usant des formules de la sec. 3.2.3 :

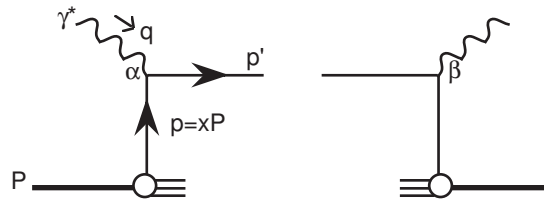
$$\begin{aligned} & \frac{g^2}{(2\pi)^2} \frac{(4\pi\mu)^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^{\sqrt{s}} \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} 2 \int_0^1 d\cos\theta (1 - \cos^2\theta)^{-1-\varepsilon} \\ &= \frac{g^2}{(2\pi)^2} \frac{(4\pi)^\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left[ \frac{1}{-2\varepsilon_{\text{ir}}} \left( \frac{s}{\mu^2} \right)^\varepsilon \right] \left[ \frac{2\sqrt{\pi}}{-\varepsilon_{\text{col}}} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma[1/2-\varepsilon]} \right] \end{aligned}$$

où le premier crochet est la "singularité" infrarouge avec  $\varepsilon$  noté  $\varepsilon_{\text{ir}}$  et le deuxième est la "singularité" colinéaire avec  $\varepsilon$  noté  $\varepsilon_{\text{col}}$  (pour faire l'intégrale angulaire il suffit de choisir comme variable  $y = \cos^2\theta$  et d'appliquer la formule (3.2.29)). On retrouve bien une divergence en  $1/\varepsilon^2$  comme dans la correction au vertex éq. (8.2.39) en QCD et ces deux termes se compenseront dans le calcul de la section efficace.

On va illustrer cette discussion par l'étude qualitative de la diffusion inélastique profonde à l'ordre  $\alpha_s$  : on rappelle les résultats à l'ordre le plus bas puis on se tourne vers la discussion des résultats à l'ordre  $\alpha_s$ . Dans un deuxième temps on fera un calcul exact à l'ordre  $\alpha_s$  en régularisation dimensionnelle qui est le prototype des calculs perturbatifs actuels.

## 9.1 Violations d'invariance d'échelle : les logarithmes dominants

### 9.1.1 Terme de Born



1. H.David Politzer, Nucl.Phys. **B129** (1977), 301.
2. D. Amati, R. Petronzio, G. Veneziano, Nucl.Phys. **B140** (1978), 54; *ibid* **B146** (1978), 29.
3. R.K. Ellis, H. Georgi, Marie Machacek, H.D. Politzer, G. G. Ross, Nucl.Phys. **B152** (1979), 285.

Cet exemple a été traité en détail, à l'approximation de Born, au chapitre 6 dans la section 6.3. On simplifie par rapport à cette étude en ne gardant que le vertex hadronique, c'est-à-dire en ne considérant que le tenseur  $W_{\mu\nu}(P, q)$  qui décrit  $\gamma^* + p \rightarrow \text{hadrons}$  et, dans le cadre du modèle des partons, le tenseur  $\widehat{W}_{\mu\nu}(p, q)$  qui décrit  $\gamma^*(q) + \text{quark}(p) \rightarrow \text{quark}(p')$  (pour alléger l'écriture, on ne prend en compte qu'une seule saveur de quarks de charge  $ee_q$ , où  $e_q$  est la charge du quark normalisée à celle  $e$  du proton :  $e_u = e_c = 2/3$ ,  $e_d = e_s = -1/3$ ). On rappelle les limites de validité du modèle des partons :

$$\begin{aligned} Q^2 &= -q^2 \rightarrow \infty \\ 2Pq &= s \rightarrow \infty \quad \text{tels que } x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} \text{ fixé,} \end{aligned} \quad (9.1.5)$$

et l'on suppose le hadron incident de masse nulle  $P^2 = 0$ . De plus on sommara sur la polarisation du photon virtuel, ce qui nous amène à construire la section efficace partonique (fictive !) :

$$\widehat{\sigma}_0^{\gamma^* q}(p, q) = \frac{1}{\text{flux}} (-g^{\mu\nu}) \widehat{W}_{\mu\nu} = \frac{-1}{4p \cdot q} \widehat{W}_\mu^\mu(p, q), \quad (9.1.6)$$

avec  $p$  l'impulsion du quark entrant et  $q$  celle du photon virtuel. La section hadronique est une superposition de sections efficaces au niveau partonique :

$$\sigma_0^{\gamma^* p}(P, q) = \int dy q_0(y) \widehat{\sigma}_0^{\gamma^* q}(yP, q) \quad (9.1.7)$$

où  $q_0(y)$  est la densité de quarks dans le hadron [on dit aussi fonction de structure du hadron] et  $y$  est la fraction d'impulsion du proton portée par le quark interagissant,  $p = yP$ . Au niveau partonique la section efficace s'écrit (voir section 6.3) :

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_0^{\gamma^* q} &= (ee_q)^2 \frac{\langle N \rangle}{\langle N \rangle} \frac{1}{4p \cdot q} \int \frac{d^3 p'}{2E'} (2\pi) \delta^{(4)}(p' - q - p) \frac{-g^{\mu\nu}}{2} \text{Tr}(\not{p}' \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu) \\ &= (ee_q)^2 \frac{1}{4p \cdot q} 2\pi \delta(-Q^2 + 2p \cdot q) 4p \cdot q \\ &= (ee_q)^2 \frac{2\pi z}{Q^2} \delta(1 - z), \end{aligned} \quad (9.1.8)$$

avec  $z = Q^2/2p \cdot q$ , la variable de Bjorken au niveau partonique. Insérant dans l'éq. (9.1.7), avec  $z = Q^2/2yP \cdot q = x/y$ , la section hadronique est le produit de la section partonique "dure" fois la distribution du quark évaluée à  $y = x$  :

$$\boxed{\sigma_0^{\gamma^* p}(P, q) = \widehat{\sigma}_0 (ee_q)^2 q_0(x), \text{ avec } \widehat{\sigma}_0 = \frac{2\pi x}{Q^2}} \quad (9.1.9)$$

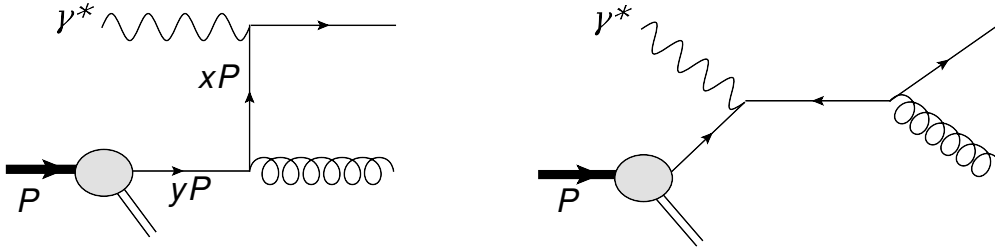
où nous avons introduit l'indice 0 pour rappeler que le calcul a été fait à l'ordre le plus bas.

La section suivante est consacrée à une présentation et interprétation des résultats sans détailler les calculs. On supposera une petite masse  $m$  au quark ( $m^2 \ll Q^2$ ), ce qui permet de régulariser la divergence colinéaire qui survit dans l'expression de la section efficace lorsqu'on inclut les corrections

QCD. Cette divergence sera absorbée dans une redéfinition de la distribution du quark dans le proton par une procédure similaire à celle qui permet d'absorber la divergence ultraviolette par une redéfinition de la constante de couplage. Le calcul détaillé fait l'objet d'un chapitre ultérieur dans le cadre de la régularisation dimensionnelle en cohérence avec la méthode utilisée pour le calcul des diagrammes virtuels au chapitre précédent.

### 9.1.2 Corrections radiatives d'ordre $\alpha_s$ : violation de l'invariance d'échelle

Au premier ordre des interactions fortes, c'est-à-dire à l'ordre  $\alpha_s$ , il faut considérer les diagrammes réels suivants :



ainsi que les diagrammes virtuels contribuant au même ordre. Les calculs sont compliqués, comme on le verra plus bas mais le résultat est relativement simple et, surtout, il admet une interprétation physique simple. En effet on trouve que la section efficace hadronique est proportionnelle à la section partonique "dure"  $\hat{\sigma}_0 (ee_q)^2$  fois une fonction compliquée dépendant logarithmiquement de  $Q^2$  :

$$\sigma_1^{\gamma^* p}(P, q) = \hat{\sigma}_0 (ee_q)^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} q_0(y) \left\{ \delta(1 - \frac{x}{y}) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(\frac{x}{y}) \ln \frac{Q^2}{m^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} f_q(\frac{x}{y}) \right\}. \quad (9.1.10)$$

Par analogie avec l'éq. (9.1.9) il est naturel d'introduire une distribution de quark violant l'invariance d'échelle :

$$q(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} q_0(y) \left[ \delta(1 - \frac{x}{y}) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(\frac{x}{y}) \ln \frac{Q^2}{m^2} \right], \quad (9.1.11)$$

de sorte que la section efficace  $\gamma^*$  *proton*, incluant les corrections QCD, a la même forme que la section efficace de Born  $\sigma_0^{\gamma^* p}$  modulo une correction d'ordre  $\alpha_s$ <sup>4</sup> :

$$\boxed{\sigma_1^{\gamma^* p}(P, q) = \hat{\sigma}_0 (ee_q)^2 \left( q(x, Q^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, Q^2) f_q(\frac{x}{y}) \right)}. \quad (9.1.12)$$

Dans les équations ci-dessus les fonctions  $P_{qq}(x/y)$  et  $f_q(x/y)$  sont le résultat du calcul. Elles seront spécifiées plus tard. On a explicité le terme proportionnel au "grand" logarithme  $\ln(Q^2/m^2)$  dont l'origine est la divergence colinéaire (singularité de masse) lorsque le gluon émis est parallèle au quark initial : en effet le calcul du carré de l'élément de matrice fait apparaître une expression qui

4. Dans le deuxième terme du membre de droite de l'équation on a substitué  $q(y, Q^2)$  à  $q(y)$  ce qui est perturbativement justifié puisque les termes négligés sont d'ordre  $\alpha_s^2$ .

contient :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3k}{k} \frac{1}{(p-k)^2 - m^2} &\approx \int dk d\cos\theta d\phi \frac{1}{\omega - p\cos\theta} \\ &\approx 2\pi \int dk \ln \frac{\omega + p}{\omega - p} \sim \int dk \ln \frac{Q^2}{m^2 z(1-z)}. \end{aligned} \quad (9.1.13)$$

Pour voir cela on se place dans de repère du centre de masse du système  $\gamma^* - quark$  où  $|\vec{p}| = |\vec{q}|$ ,  $\omega - |\vec{p}| \approx m^2/2|\vec{q}|$ ,  $\omega + |\vec{p}| \approx 2|\vec{q}|$ , et on peut prouver que  $4|\vec{q}|^2 = Q^2/z(1-z)$  où  $z$  est la variable de Bjorken au niveau partonique (voir l'éq. (9.1.8) pour la cinématique).

### Interprétation

La fonction  $q(x, Q^2)$  est la distribution des quarks dans le proton et elle dépend maintenant logarithmiquement de l'échelle d'énergie du processus considéré : on parle alors de "violation logarithmique de l'invariance d'échelle". Ceci est à contraster avec l'invariance d'échelle de la distribution de quarks  $q(x)$  introduit dans le modèle des partons naïf. L'interprétation de l'éq. (9.1.11) est la suivante : le quark qui interagit avec le photon virtuel avec une fraction  $x$  de l'impulsion du proton résulte soit d'un quark qui interagit directement, soit d'un quark portant la fraction  $y > x$  de l'impulsion du proton et qui a perdu une fraction  $x/y$  de son impulsion après avoir émis un gluon "quasi-colinéaire". On peut estimer la "probabilité" de rayonnement d'un gluon à  $(\alpha_s/2\pi)P_{qq}(x/y) \ln(Q^2/m^2)$ . La divergence en  $\ln(Q^2/m^2)$  apparue dans le calcul du processus partonique dur,  $\gamma^* + quark \rightarrow quark + gluon$ , peut en fait être associée à la distribution du quark dans le proton, éq. (9.1.11), plutôt qu'au processus dur : on dit alors que cette "divergence" est factorisée dans la fonction de structure. On peut deviner que le calcul au premier ordre n'est pas suffisant puisque la "probabilité" d'émission du gluon est d' $\mathcal{O}(\alpha_s \ln(Q^2/m^2)) \sim 1$  si on suppose, comme cela paraît raisonnable, que  $\alpha_s \sim 1/\ln Q^2$ . Il faut alors sommer de tels termes à tous les ordres. On peut montrer que la propriété de factorisation est vraie à tous les ordres de perturbation et elle est connue sous le nom de "théorème de factorisation".

En fait, de même que l'on a plusieurs schémas de renormalisation (relations entre couplage nu et renormalisé) on peut définir différents "schémas de factorisation" c'est à dire différentes relations entre distributions partoniques invariante et violant l'invariance d'échelle. Par exemple, si on choisit :

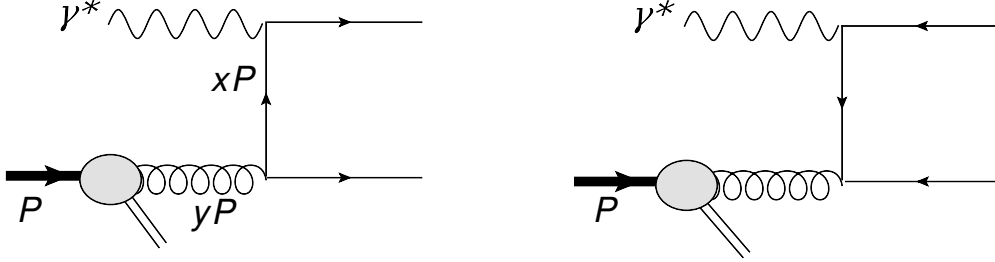
$$q(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} q_0(y) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{m^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} f_q\left(\frac{x}{y}\right) \right] \quad (9.1.14)$$

la section efficace  $\gamma^*$  *proton* devient alors dans ce schéma simplement :

$$\sigma_1^{\gamma^* p}(P, q) = \hat{\sigma}_0 (ee_q)^2 q(x, Q^2). \quad (9.1.15)$$

Un dernier commentaire concernant les éqs. de type (9.1.11) et (9.1.14) : techniquement elles ne sont pas définies dans la limite  $m = 0$  qui nous intéresse mais si on compare  $q(x, Q^2)$  à la même distribution définie à une échelle de référence  $Q_0^2$  et que l'on exprime  $q(x, Q^2)$  en fonction de  $q(x, Q_0^2)$ , alors toute dépendance en  $m^2$  a disparu et on peut, en principe, prédire la distribution partonique à tout  $Q^2$  une fois la distribution connue expérimentalement à un  $Q_0^2$  donné.

Le calcul de la section efficace  $\gamma^*$  *proton* n'est, en fait, pas encore complet car, à l'ordre auquel on travaille, il faut prendre en compte la composante gluon du proton qui contribue à la fonction de structure par le processus  $\gamma^* + \text{gluon} \rightarrow \text{quark} + \text{antiquark}$  :



Deux diagrammes de Feynman sont à prendre en compte. Il n'existe pas, à l'ordre auquel on mène la discussion, de termes virtuels associés. Sans faire de calcul on peut deviner la forme que prendra cette contribution à la section efficace  $\gamma^*$  *proton*. Le gluon se fragmente en une paire *quark-antiquark* qui peut être en configuration colinéaire suivie de l'interaction dure du photon virtuel avec le quark ou l'antiquark. Comme dans le cas précédent, cette fragmentation colinéaire a une singularité de masse régularisée par le paramètre  $m$  et engendre un terme de la forme  $\alpha_s P_{qG}(x/y) \ln Q^2/m^2$ . Si on note  $G_0(y)$  la fonction de distribution du gluon ce processus apporte donc une nouvelle contribution puisque il engendre un quark d'impulsion  $x$  avec une "probabilité" d'ordre  $G_0(y) \alpha_s P_{qG}(x/y) \ln \frac{Q^2}{m^2}$ . Sa contribution s'ajoutera à la section hadronique éq. (9.1.10) qui devient alors :

$$\begin{aligned} \sigma_1^{\gamma^* p}(P, q) = & \hat{\sigma}_0 (ee_q)^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ q_0(y) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{m^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} f_q\left(\frac{x}{y}\right) \right] \right. \\ & \left. + G_0(y) \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{m^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} f_G\left(\frac{x}{y}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (9.1.16)$$

On peut alors définir, en prenant en compte les réactions  $\gamma^* + \text{quark} \rightarrow \text{gluon} + \text{quark}$  et  $\gamma^* + \text{gluon} \rightarrow \text{quark} + \text{antiquark}$ , la distribution de quark dépendante de  $Q^2$  :

$$q(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ q_0(y) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{m^2} \right] + \frac{\alpha_s}{2\pi} G_0(y) P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{m^2} \right\}. \quad (9.1.17)$$

au lieu de l'éq. (9.1.11) : le gluon d'impulsion  $y$  apparaît donc comme une source de quarks d'impulsion  $x < y$ . La section efficace hadronique s'écrira donc :

$$\sigma_1^{\gamma^* p}(P, q) = \hat{\sigma}_0 (ee_q)^2 \left( q(x, Q^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [q(y, Q^2) f_q\left(\frac{x}{y}\right) + G(y, Q^2) f_G\left(\frac{x}{y}\right)] \right). \quad (9.1.18)$$

Dans cette expression, on a supposé que la distribution du gluon, comme celle du quark, était également dépendante de l'échelle caractéristique du processus dur. On note, en passant, que ce processus de création d'une paire  $q\bar{q}$  est aussi une source d'antiquarks d'impulsion  $x$  avec avec une "probabilité"  $\int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_s}{2\pi} G_0(y) P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{m^2}$  qui s'ajoutera à la distribution  $\bar{q}(x)$  du proton.



Note technique

Les équations ci-dessus s'écrivent également, après le changement de variable  $x/y \rightarrow y$ ,

$$q(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ q_0\left(\frac{x}{y}\right) \left[ \delta(1-y) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(y) \ln \frac{Q^2}{m^2} \right] + \frac{\alpha_s}{2\pi} G_0\left(\frac{x}{y}\right) P_{qG}(y) \ln \frac{Q^2}{m^2} \right\}. \quad (9.1.19)$$

$$\sigma_1^{\gamma^*p}(P, q) = \hat{\sigma}_0 (ee_q)^2 \left( q(x, Q^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [q\left(\frac{x}{y}, Q^2\right) f_q(y) + G\left(\frac{x}{y}, Q^2\right) f_G(y)] \right). \quad (9.1.20)$$

### 9.1.3 Equations d'évolution de la distribution de quark : équation DGLAP

La divergence colinéaire a été factorisée, dans l'éq. (9.1.17), à l'échelle  $Q^2$ . On aurait pu aussi bien choisir  $.5 Q^2$  ou  $4 Q^2$ . Plus généralement, on introduit une "échelle de factorisation"  $M$  arbitraire, mais d'ordre  $\sqrt{Q^2}$  et, après avoir décomposé  $\ln(Q^2/m^2) = \ln(M^2/m^2) + \ln(Q^2/M^2)$  et défini :

$$q(x, M^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ q_0(y) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{M^2}{m^2} \right] + \frac{\alpha_s}{2\pi} G_0(y) P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{M^2}{m^2} \right\}, \quad (9.1.21)$$

on peut ré-écrire la section efficace  $\gamma^*$  *proton* :

$$\sigma_1^{\gamma^*p}(P, q) = \hat{\sigma}_0 (ee_q)^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ q(y, M^2) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{M^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} f_q\left(\frac{x}{y}\right) \right] + G(y, M^2) \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{M^2} + \frac{\alpha_s}{2\pi} f_G\left(\frac{x}{y}\right) \right] \right\} \quad (9.1.22)$$

A l'ordre auquel est fait le calcul, la section efficace  $\sigma_1^{\gamma^*p}$  est strictement indépendante du choix de l'échelle de factorisation. L'introduction de l'échelle  $M$  peut paraître artificielle à ce point mais on discutera son rôle plus bas. On considère maintenant la dérivée par rapport à  $M^2$  de l'éq. (9.1.21). On trouve :

$$M^2 \frac{dq(x, M^2)}{dM^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ q_0(y) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) + G_0(y) P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \right], \quad (9.1.23)$$

L'expression obtenue est parfaitement finie même quand le cut-off infrarouge  $m$  est pris égal à 0, car ce dernier n'apparaît pas dans l'équation intégral-différentielle. A l'ordre auquel on a fait le calcul cette équation est équivalente à :

$$M^2 \frac{dq(x, M^2)}{dM^2} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ q(y, M^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) + G(y, M^2) P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \right], \quad (9.1.24)$$

puisque  $q_0(y)$  et  $q(y, M^2)$  (idem pour  $G_0(y)$  et  $G(y, M^2)$ ) diffèrent par des termes d' $\mathcal{O}(\alpha_s)$ , et donc les termes négligés dans la substitution sont d'ordre  $\alpha_s^2$ . On a d'autre part choisi de renormaliser la théorie à  $M^2$ , d'où le choix  $\alpha_s \rightarrow \alpha_s(M^2)$ . Cette équation est une des équations DGLAP (Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi)<sup>5</sup> qui donne l'évolution en fonction de l'échelle de la

5. Yu.L. Dokshitzer, Sov.Phys. JETP **46** (1977), 641, Zh.Eksp.Teor.Fiz. **73** (1977), 1216; G. Altarelli, G. Parisi, Nucl.Phys. **B126** (1977), 298.

distribution du quark dans le proton mais ne dit rien sur la dépendance en  $x$ . On peut obtenir la distribution elle-même en résolvant l'équation intégral-différentielle avec comme condition aux limites la valeur de la fonction à une échelle  $M_0$ ,  $q(x, M_0^2)$ , qui sera prise par comparaison aux données expérimentales (voir sec. 9.1.8). L'approximation à laquelle on a dérivé cette équation est dite "ordre des logarithmes dominants (LO leading logarithm order)" puisqu'on n'a gardé que les termes d'ordre  $\alpha_s$ .

Finalement, si on revient à la fonction de structure  $\nu W_2$  avec  $N_f$  saveurs de quarks, introduite lors de la discussion de la diffusion profondément inélastique, elle prend dans le schéma de factorisation défini par l'éq. (9.1.17) la forme suivante (comparer l'éq. (6.3.23) à (9.1.18)) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \nu W_2(x, Q^2) &\equiv F_2(x, Q^2) \\ &= \sum_{i, \bar{i}}^{N_f} (e e_i)^2 \left\{ q_i(x, Q^2) + \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ q_i(y, Q^2) f_q\left(\frac{x}{y}\right) + G(y, Q^2) f_G\left(\frac{x}{y}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (9.1.25)$$

où on a remplacé la distribution partonique dénotée  $F_i$  en éq. (6.3.23) par celle  $q_i(x, Q^2)$  violant l'invariance d'échelle et pris en compte les corrections d'ordre  $\alpha_s$ . Pour les quarks de masse nulle les fonctions  $P_{qq}$ ,  $P_{qG}$ ,  $f_q$  et  $f_G$  sont indépendantes de la saveur  $i$  du quark. Dans l'équation ci-dessus on a choisi pour l'échelle de factorisation  $M = Q$ . On laisse au lecteur le soin de d'écrire la formule générale pour une échelle arbitraire  $M$  (voir l'éq. (9.1.22)).

Utilisant pour  $q_i(x, M^2)$  la solution de l'équation intégral-différentielle plutôt que l'éq. (9.1.21) permet de troquer l'arbitraire du choix du cut-off  $m$  pour l'arbitraire d'une échelle de masse plus physique  $M$  qui sera choisie lorsqu'on fera l'ajustement des distributions partoniques aux données. Ceci est remniscent de la relation entre un couplage renormalisé et un couplage nu, où on a ajusté la constante de couplage renormalisée aux données pour pouvoir faire des prédictions : alors on ajustait un point, ici on ajuste une fonction ! L'arbitraire du choix de l'échelle de factorisation est similaire à celui du choix de l'échelle de renormalisation et les observables ne doivent pas dépendre, à des termes d'ordre supérieur près, du choix de  $M$ .

#### 9.1.4 Solution de l'équation d'évolution par la méthode des moments.

On peut ramener l'équation intégral-différentielle (9.1.24) à une équation différentielle ordinaire en considérant les moments :

$$M_n(\tau) = \int_0^1 dx x^{n-1} q(x, M^2) \quad (9.1.26)$$

où on a introduit la variable naturelle  $\tau = \ln(M^2/\Lambda^2)$  avec  $\Lambda$  tel que défini dans l'éq. (8.2.55) par exemple. Pour simplifier la discussion on étudie l'évolution de la distribution d'un quark de valence  $q_v(x, M^2) = q(x, M^2) - \bar{q}(x, M^2)$  où  $q(x, M^2)$  et  $\bar{q}(x, M^2)$  sont les distributions d'une saveur de quark et d'antiquark dans le proton : la contribution du gluon se compense dans cette combinaison et l'équation DGLAP est simplement :

$$M^2 \frac{dq_v(x, M^2)}{dM^2} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} q_v(z, M^2) P_{qq}\left(\frac{x}{z}\right), \quad (9.1.27)$$

En terme des moments on obtient :

$$\frac{dM_n(\tau)}{d\tau} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} M_n(\tau) d_{qq}^{(n)} \quad (9.1.28)$$

avec  $d_{qq}^{(n)}$ , appelé  $n$ -ième moment de la dimension anormale, donnée par :

$$d_{qq}^{(n)} = \int_0^1 dy y^{n-1} P_{qq}(y). \quad (9.1.29)$$

La solution est obtenue par :

$$\frac{1}{M_n(\tau)} \frac{dM_n(\tau)}{d\tau} = \frac{d_{qq}^{(n)}}{2\pi} \frac{1}{b\tau}$$

où on a substitué à  $\alpha_s(M^2)$  sa dépendance explicite en fonction de l'échelle, éq. (8.2.53),

$$\alpha_s(M^2) = \frac{1}{b \ln(M^2/\Lambda^2)} = \frac{1}{b\tau} \quad \text{avec } b = \frac{11N - 2N_f}{12\pi}, \quad (9.1.30)$$

d'où on tire :

$$\ln \frac{M_n(\tau)}{M_n(\tau_0)} = \frac{d_{qq}^{(n)}}{2\pi b} \ln \frac{\tau}{\tau_0}$$

soit :

$$\boxed{\frac{M_n(\tau)}{M_n(\tau_0)} = \left( \frac{\alpha_s(M^2)}{\alpha_s(M_0^2)} \right)^{-\frac{d_{qq}^{(n)}}{2\pi b}}}. \quad (9.1.31)$$

On peut montrer que :

$$d_{qq}^{(1)} = 0, \quad d_{qq}^{(n)} < 0 \quad \text{pour } n \geq 2. \quad (9.1.32)$$

Plus  $n$  est grand, plus le poids de la région à grand  $x$  est important dans l'intégrale (9.1.26). Donc l'évolution en  $M$  de  $M_n(\tau)$  à grand  $n$  reflète l'évolution en  $M$  de  $q(x, M^2)$  à grand  $x$ . L'éq. (9.1.31) donne

$$M_n(\tau) \sim \left( \frac{1}{\ln M^2/\Lambda^2} \right)^{-\frac{d_{qq}^{(n)}}{2\pi b}} \quad (9.1.33)$$

qui décroît quand  $M$  croît pour  $n \geq 2$ . D'où  $q(x, M^2)$  décroît à grand  $x$  quand  $M$  croît. La dépendance en  $M$  est lente puisque logarithmique. On peut comprendre cette variation car, en QCD, le quark perd de son énergie par émission de gluon et se retrouve à plus bas  $x$ .

Le comportement en  $M$  du moment de l'éq. (9.1.31) correspond à la sommation à tous les ordres des termes en  $\alpha_s \ln \frac{M^2}{M_0^2}$ . On peut voir ceci en utilisant la forme éq. (8.2.52) du couplage  $\alpha_s(M^2)$ , ce qui mène à :

$$\begin{aligned} M_n(\tau) &= M_n(\tau_0) \left( 1 + b \alpha_s(M_0^2) \ln \frac{M^2}{M_0^2} \right)^{\frac{d_{qq}^{(n)}}{2\pi b}} \\ &= M_n(\tau_0) \left( 1 + \frac{\alpha_s(M_0^2)}{2\pi} d_{qq}^{(n)} \ln \frac{M^2}{M_0^2} + \dots \left( \frac{\alpha_s(M_0^2)}{2\pi} \ln \frac{M^2}{M_0^2} \right)^2 + \dots \right). \end{aligned} \quad (9.1.34)$$

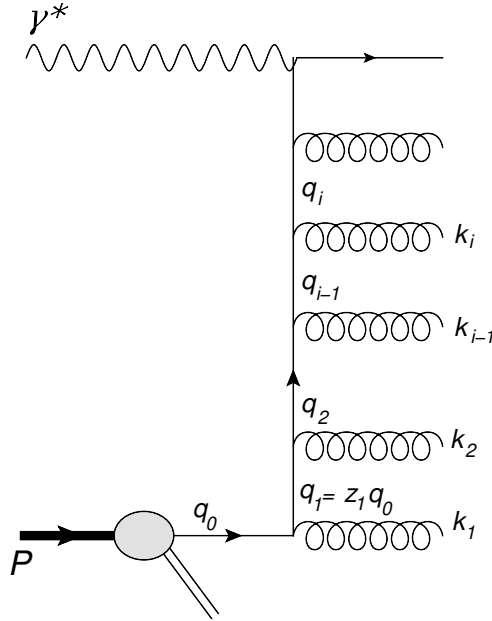
La forme éq. (9.1.31) de la distribution partonique correspond bien à un développement en série à tous les ordres en  $\alpha_s$  mais à chaque ordre on n'a gardé que les termes  $\alpha_s \ln(M^2)$  : on dit alors que l'on a fait "l'approximation des logarithmes dominants" ou que l'on a resommé les logarithmes dominants. Si on ne garde que les deux premiers termes on retrouve bien sous forme de moments la relation entre  $q(z, M^2)$  et  $q(z, M_0^2)$  obtenue à partir de l'équation (9.1.21) (où on a évidemment ignoré la contribution du gluon puisqu'on a discuté seulement l'évolution du quark de valence).

### 9.1.5 Approche intuitive

L'équation (9.1.31) peut également être obtenue en sommant explicitement les diagrammes en échelle du type ci-dessous : Soit  $q_0$  l'impulsion du quark dans le proton avant émission de gluon et  $q_1$  celle après émission du premier gluon, ...,  $q_i$  l'impulsion du quark après émission du gluon d'impulsion  $k_i$ . On peut montrer que :

$$q_i^2 \sim q_{i-1}^2 - k_{iT}^2/x_i \tag{9.1.35}$$

où on a supposé  $q_i \rightarrow \infty$ ,  $x_i \sim k_i/q_i \ll 1$  et on mesure l'impulsion transverse du gluon par rapport à la direction du quark.



A chaque émission de gluon la virtualité du quark est négative et croît en module, de sorte que l'on a la hiérarchie  $-q_{i+1}^2 = Q_{i+1}^2 > Q_i^2 = -q_i^2$ . Comme pour l'émission d'un gluon en éq. (9.1.11), à chaque émission on a un facteur :

$$\frac{\alpha_s(Q_i^2)}{2\pi} \frac{dQ_i^2}{Q_i^2} P_{qq}(z_i) dz_i \tag{9.1.36}$$

où  $z_i$  est la fraction d'impulsion du quark  $q_{i-1}$  cédée au quark  $q_i$  ( $z_i = 1 - x_i$ ). On a "amélioré" la théorie des perturbations en choisissant  $Q_i^2$  comme échelle dans la constante de couplage (voir sec.

8.2.4). Si on somme sur toutes les émissions de gluon on a :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{\alpha_s(Q_1^2)}{2\pi} \frac{dQ_1^2}{Q_1^2} P_{qq}(z_1) dz_1 \cdots \int_{Q_{i-1}^2}^{Q^2} \frac{\alpha_s(Q_i^2)}{2\pi} \frac{dQ_i^2}{Q_i^2} P_{qq}(z_i) dz_i \cdots \int_{Q_{p-1}^2}^{Q^2} \frac{\alpha_s(Q_n^2)}{2\pi} \frac{dQ_n^2}{Q_n^2} P_{qq}(z_p) dz_p$$

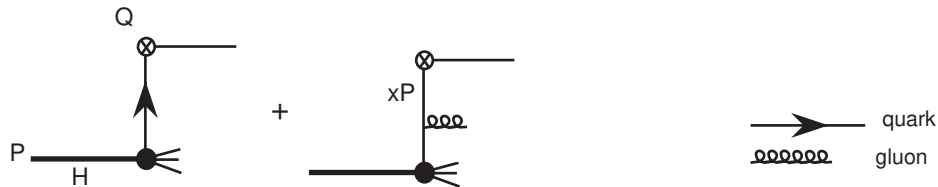
Utilisant la forme  $\alpha_s(Q_i^2) = 1/b \ln(Q_i^2/Q_0^2)$  on montre que le résultat s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left( \frac{\tilde{P}}{2\pi b} \ln \frac{\ln Q^2}{\ln Q_0^2} \right)^p &= \left( \frac{\ln Q^2}{\ln Q_0^2} \right)^{\frac{\tilde{P}}{2\pi b}} \\ &= \left( \frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(Q_0^2)} \right)^{-\frac{\tilde{P}}{2\pi b}} \end{aligned} \tag{9.1.37}$$

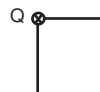
où la notation  $\tilde{P} = \int P_{qq}(z_i) dz_i$ . Cette expression est un cas particulier, avec  $p = 1$ , de l'éq. (9.1.31) obtenue dans l'espace des moments mais elle donne une image de la cinématique à l'œuvre dans l'approximation des logarithmes dominants : le parton issu du proton porte une fraction d'impulsion  $z$  et une petite virtualité d'ordre  $Q_0^2$ . A chaque émission d'un gluon le quark gagne en virtualité négative et perd une petite partie (négligée dans notre approche semi-quantitative) de son impulsion. Lors de l'interaction avec le photon il aura une virtualité d'ordre  $Q^2$  et une impulsion  $x < z$ . De façon équivalente une discussion plus fine montre l'émission des gluons est ordonnée en angle par rapport à la direction du quark : une grande virtualité étant associée à un grand angle.

### 9.1.6 Equations d'évolution couplées des quarks et des gluons

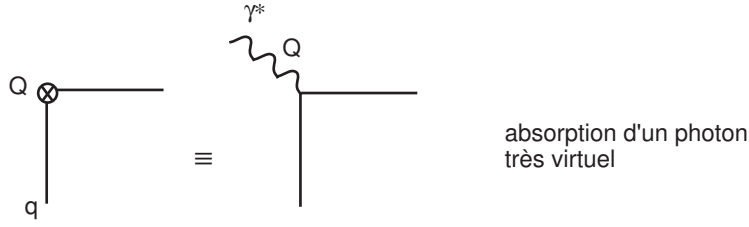
S'affranchissant des détails de la collision dure on peut résumer l'étude précédente par les diagrammes



Le symbole



indique la collision "dure" du parton : dans le cas précédent ce processus est simplement



L'éq. (9.1.17) exprime le fait que toutes les singularités de masse sont absorbées dans la distribution du quark indépendamment du processus dur auquel le quark participe. La même propriété est vraie pour la distribution de gluon mais auparavant il est utile de définir la distribution "singulet" pour  $N_f$  saveurs :

$$\Sigma(x, M^2) = \sum_i^{N_f} (q_i(x, M^2) + \bar{q}_i(x, M^2)) \quad (9.1.38)$$

qui est la probabilité de trouver un quark ou un antiquark dans le hadron, quelque soit sa saveur, et de façon évidente, à l'ordre  $\alpha_s$ , il vient par analogie avec l'éq. (9.1.17) :

$$\begin{aligned} \Sigma(x, M^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ \Sigma(y) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{M^2}{m^2} \right] \right. \\ \left. + G(y) \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{M^2}{m^2} \times \underbrace{2}_{q_i + \bar{q}_i} \times \underbrace{N_f}_{\text{nb. de saveurs}} \right\} \quad (9.1.39) \end{aligned}$$

Sous forme différentielle on trouve

$$\frac{d\Sigma(x, M^2)}{d \ln M^2} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ \Sigma(y, M^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) + G(y, M^2) 2N_f P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \right\} \quad (9.1.40)$$

et de même pour la quantité "non-singulet" ou de valence

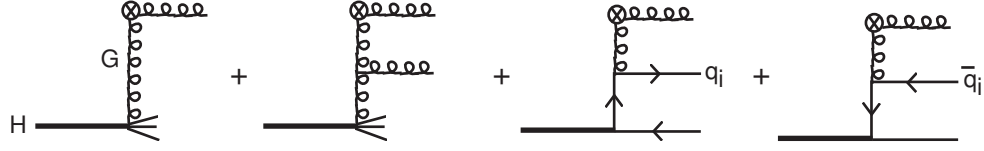
$$V_i(x, M^2) = q_i(x, M^2) - \bar{q}_i(x, M^2) \quad (9.1.41)$$

dont l'évolution est gouvernée par

$$\frac{dV_i(x, M^2)}{d \ln M^2} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} V_i(y, M^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \quad (9.1.42)$$

Dans cette dernière équation le terme proportionnel à  $G(y, M^2)$  disparaît puisqu'il contribue autant à  $q_i(x, M^2)$  qu'à  $\bar{q}_i(x, M^2)$ .

Jusqu'à maintenant nous n'avons considéré que le cas où le quark participe directement à la sous-collision dure (absorption du photon virtuel) mais on peut imaginer des processus, purement hadroniques, où le gluon peut lui aussi participer à la diffusion dure et on a alors à prendre en compte les diagrammes suivants :



qui mènent aux équations d'évolution pour le gluon :

$$\frac{dG(x, M^2)}{d \ln M^2} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left\{ G(y, M^2) P_{GG}\left(\frac{x}{y}\right) + \Sigma(y, M^2) P_{Gq}\left(\frac{x}{y}\right) \right\}. \quad (9.1.43)$$

Le premier terme du membre de droite est la contribution du gluon dans le hadron qui participe à la collision dure après émission d'un gluon quasi-colinéaire tandis que le deuxième terme vient du cas où le gluon est émis par un quark ou un antiquark du hadron initial.

Regroupant tout, on obtient les équations DGLAP :

$$\boxed{\frac{dV_i(x, M^2)}{d \ln M^2} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) V_i(y, M^2)} \quad (9.1.44)$$

pour chaque saveur, et les équations intégral-différentielles couplées pour les distributions du singulet et du gluon

$$\boxed{\frac{d}{d \ln M^2} \begin{pmatrix} \Sigma(x, M^2) \\ G(x, M^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \begin{pmatrix} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) & 2N_f P_{qG}\left(\frac{x}{y}\right) \\ P_{Gq}\left(\frac{x}{y}\right) & P_{GG}\left(\frac{x}{y}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma(y, M^2) \\ G(y, M^2) \end{pmatrix}} \quad (9.1.45)$$

Les  $P_{ij}(z)$ , appelés noyaux d'Altarelli-Parisi, sont prédits par la théorie et dans l'approximation des logarithmes dominants on trouve :

$$\begin{aligned} P_{qq}(z) &= \langle c_F \rangle \left( \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right) \\ P_{qG}(z) &= \langle \frac{1}{2} \rangle (z^2 + (1-z)^2) \\ P_{Gq}(z) &= \langle c_F \rangle \frac{1+(1-z)^2}{z} \\ P_{GG}(z) &= \langle 2N \rangle \left( \frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right) + \left\langle \frac{11N - 2N_f}{6} \right\rangle \delta(1-z) \end{aligned} \quad (9.1.46)$$

où la prescription " + " est la notation habituelle pour la régularisation des divergences infrarouges et elle est définie au sens des distributions par :

$$\int_0^1 dz \frac{h(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{h(z) - h(1)}{1-z}, \quad (9.1.47)$$

$h(z)$  étant une fonction test régulière en  $z = 1$ .

### 9.1.7 Stabilité de l'interprétation partonique : règles de somme

Dans le modèle des partons naïf on était conduit aux règles de somme suivantes :

$$\int_0^1 dx V_i(x) = n_i \equiv \text{nombre de quarks de valence de type } i$$

$$\int_0^1 dx x (\Sigma(x) + G(x)) = 1 \equiv \text{conservation de l'impulsion.}$$

Ces lois de conservation sont indépendantes de l'échelle  $Q$  de la collision dure. Est-ce vrai après corrections QCD, c'est-à-dire est-ce que les relations :

$$\frac{d}{d \ln Q^2} \int_0^1 dx V_i(x, Q^2) = 0 ; \quad \frac{d}{d \ln Q^2} \int_0^1 dx x (\Sigma(x, Q^2) + G(x, Q^2)) = 0$$

sont vérifiées ? On peut facilement voir que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln Q^2} \int_0^1 dx V_i(x, Q^2) &= \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{dz}{z} V_i\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) P_{qq}(z) \\ &= \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_0^1 dz P_{qq}(z) \int_0^1 dy V_i(y, Q^2), \quad \text{avec } z = x/y, \\ &= 0 \end{aligned} \tag{9.1.48}$$

puisqu'on peut montrer que :

$$\int_0^1 dz P_{qq}(z) = 0. \tag{9.1.49}$$

— De même, la deuxième loi de conservation est satisfaite car :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz z [P_{qq}(z) + P_{Gq}(z)] &= 0 \\ \int_0^1 dz z [P_{GG}(z) + 2N_f P_{qG}(z)] &= 0. \end{aligned} \tag{9.1.50}$$

L'interprétation physique du modèle naïf est bien préservée par les corrections QCD au premier ordre, et même à tous les ordres.

Les fonctions  $P_{Gq}(z)$  et  $P_{GG}(z)$  ne sont pas définies pour  $z = 0$ . On peut introduire une forme régularisée :

$$\begin{aligned} P_{Gq}(z) &= \langle c_F \rangle \left( \frac{1 + (1-z)^2}{z_+} + \frac{3}{2} \delta(z) \right) \\ P_{GG}(z) &= \langle 2N \rangle \left( \frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z_+} + z(1-z) \right) + \left\langle \frac{11N - 2N_f}{6} \right\rangle (\delta(1-z) + \delta(z)), \end{aligned} \tag{9.1.51}$$

Ces fonctions satisfont les relations de symétrie :

$$\begin{aligned} P_{Gq}(z) &= P_{qG}(1-z), \quad 0 \leq z \leq 1 \\ P_{GG}(z) &= P_{GG}(1-z), \quad 0 \leq z \leq 1. \end{aligned} \tag{9.1.52}$$



qui sont évidentes dans l'interprétation partonique des noyaux d'Altarelli-Parisi. Utilisant également la relation  $P_{qG}(z) = P_{qG}(1-z)$ , on prouve facilement à partir des éqs. (9.1.46) et (9.1.51) les règles de somme suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz [P_{qq}(z) + P_{Gq}(z)] &= 0 \\ \int_0^1 dz [P_{GG}(z) + 2N_f P_{qG}(z)] &= 0. \end{aligned} \quad (9.1.53)$$

qui seront utiles plus bas dans la discussion sur la compensation des divergences infrarouge et colinéaire.

### 9.1.8 Phénoménologie

La figure 9.1 montre une compilation des données récentes sur la fonction de structure du proton obtenues dans les collisions  $e^+p$ ,  $e^-p$  et  $\mu^-p$ . On peut remarquer l'étendue du domaine en  $x$  couvert par les expériences,  $5,0 \cdot 10^{-5} < x < 0,85$ , ainsi que la remarquable précision expérimentale qui est de quelques % dans un grand domaine en  $x$  et  $Q^2$ ,  $2 < Q^2[\text{GeV}^2] < 2 \cdot 10^4$ . Pour mesurer les progrès accomplis depuis les premières mesures de SLAC on peut se reporter à la figure 6.1. La violation de l'invariance d'échelle a tendance à faire décroître  $F_2(x, Q^2)$  à  $x > 0,25$  quand  $Q^2$  augmente, en accord avec la discussion suivant l'éq. (9.1.33), tandis qu'aux petites valeurs de  $x$  la fonction de structure  $F_2(x, Q^2)$  croît rapidement avec  $Q^2$  (augmentation de la densité de quarks matelots, produits de désintégration des gluons rayonnés). L'apparente invariance d'échelle pour  $0,05 < x < 0,25$  n'est en fait que la limite entre les deux régimes. La détermination du comportement de  $F_2(x, Q^2)$  aux petites valeurs de  $x$  fait actuellement l'objet de nombreuses études théoriques : à petits  $x$ , dans le calcul perturbatif, des termes de la forme  $\alpha_s(Q^2) \ln(1/x)$  deviennent importants et il faut, en principe, les sommer à tous les ordres : c'est le régime BFKL<sup>6</sup> pertinent dans le domaine "petits  $x$ , petits  $Q^2$ ", en contraste avec le régime DGLAP qui concerne la sommation des "grands"  $\alpha_s(Q^2) \ln Q^2$ .

A partir de ces données, et en utilisant aussi d'autres réactions comme on le discutera dans le chapitre sur les applications du modèle des partons, il est possible d'extraire la distribution des quarks  $u$ ,  $d$ , ... et du gluon dans le proton. Une façon de procéder est la suivante : on fait une hypothèse sur la forme en  $x$  des distributions partoniques, par exemple<sup>7</sup> :

$$\begin{aligned} xu_v(x) &= a_u x^{b_u} (1-x)^{c_u} (1+d_u x^2), \quad \text{quark } u \text{ de valence,} \\ xd_v(x) &= a_d x^{b_d} (1-x)^{c_d}, \quad \text{quark } d \text{ de valence,} \\ xq_s(x) &= a_s x^{b_s} (1-x)^{c_s}, \quad \text{quark matelot, on approxime souvent } u_s = \bar{u}_s = d_s = \dots = q_s, \\ xG(x) &= a_{g1} x^{b_{g1}} (1-x)^{c_{g1}} - a_{g2} x^{b_{g2}} (1-x)^{c_{g2}}, \end{aligned} \quad (9.1.54)$$

6. I.I. Balitsky, L.N. Lipatov, Sov.J.Nucl.Phys. **28** (1978), 822, Yad.Fiz. **28** (1978) 1597; E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, Victor S. Fadin, Sov.Phys. JETP **44** (1976) 443, Zh.Eksp.Teor.Fiz. **71** (1976), 840, Erratum-ibid. **45** (1977), 199.

7. Si on ne s'intéresse qu'aux données  $F_2$  de la diffusion inélastique sur cible iso-scalaire d'un électron ou d'un muon il suffit de paramétrer  $\Sigma(x, Q_0^2)$  et  $G(x, Q_0^2)$  mais on ne peut alors pas accéder au résultat individuellement pour chaque saveur. Pour cela il faut inclure d'autres données, en particulier la DIS neutrino-proton ou neutrino-neutron qui distingue la diffusion sur un quark de celle sur un antiquark

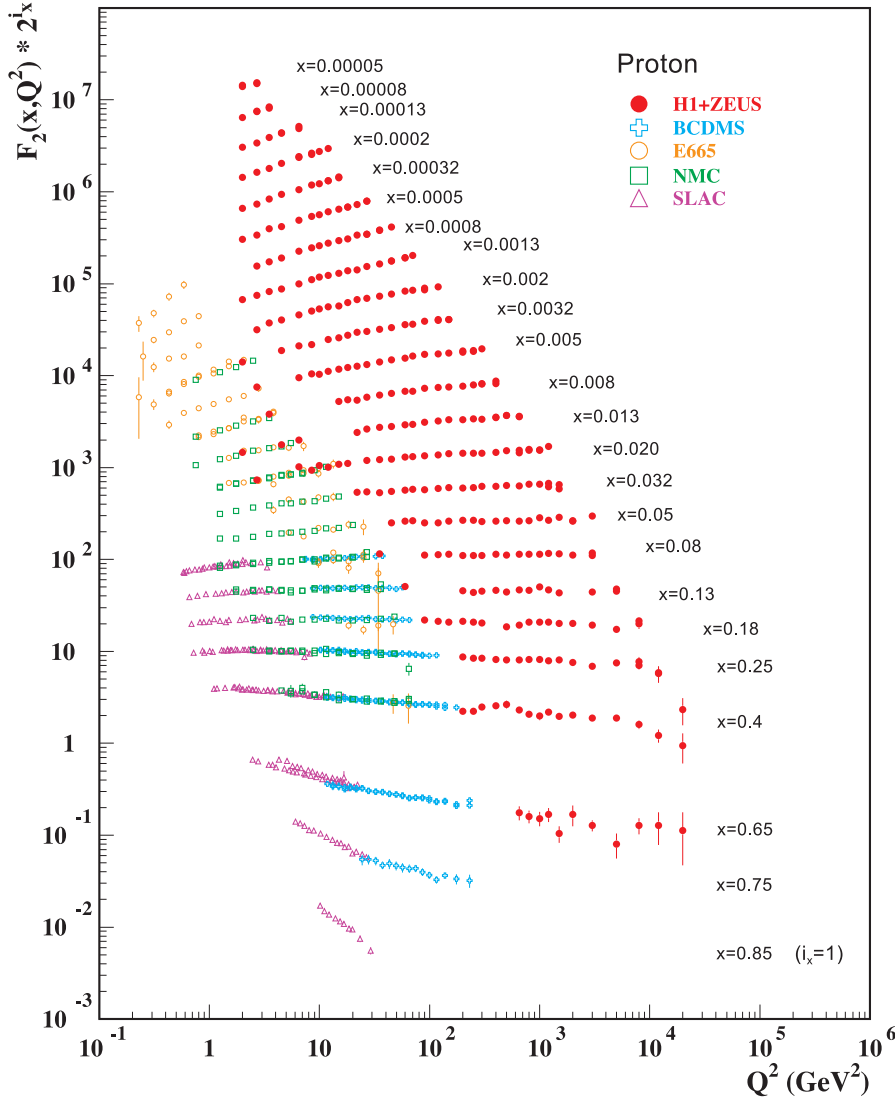


FIGURE 9.1 – Fonction de structure du proton mesurée dans les collisions  $e p$  par les collaborations SLAC, NMC, E665, BCDMS, H1 et ZEUS, compilation des données expérimentales par le Particle Data Group, J. Beringer et al. *Phys. Rev.* **D86**, 01001 (2012).

à une valeur de  $Q^2 = Q_0^2$  (typiquement  $Q_0^2 = 2 \text{ GeV}^2$ ). Utilisant les équations DGLAP et comparant aux données  $F_2(x, Q^2)$  telles que celles de la figure 9.2, on peut déterminer les paramètres  $a, b, c, \dots$  ainsi que la valeur de  $\Lambda_{\overline{MS}}$ . Un excellent accord est obtenu, ce qui est une bonne vérification expérimentale des équations DGLAP et donc de QCD. Actuellement les ajustements sont faits à l'ordre NLO et même NNLO (*next-to-next leading order*) avec des techniques de régression et d'estimations d'erreurs sur les paramétrages très élaborées. On trouvera sur la base de données "HEPDAT - PARTON DISTRIBUTIONS" : <http://durpdg.dur.ac.uk/hepdata/cteq.html> ou LHAPDF : <http://lhapdf.hepforge.org/pdfsets.html> différents ensembles de distributions partoniques avec évolution au LO ou au NLO ou au NNLO,

les plus couramment utilisés étant ceux de CTEQ<sup>8</sup>, MRSTW<sup>9</sup>, ALEKHIN<sup>10</sup>, HERAPDF<sup>11</sup> ou les nouvelles distributions NNPDF<sup>12</sup> qui attachent une importance particulière à la réduction des biais de la méthode.

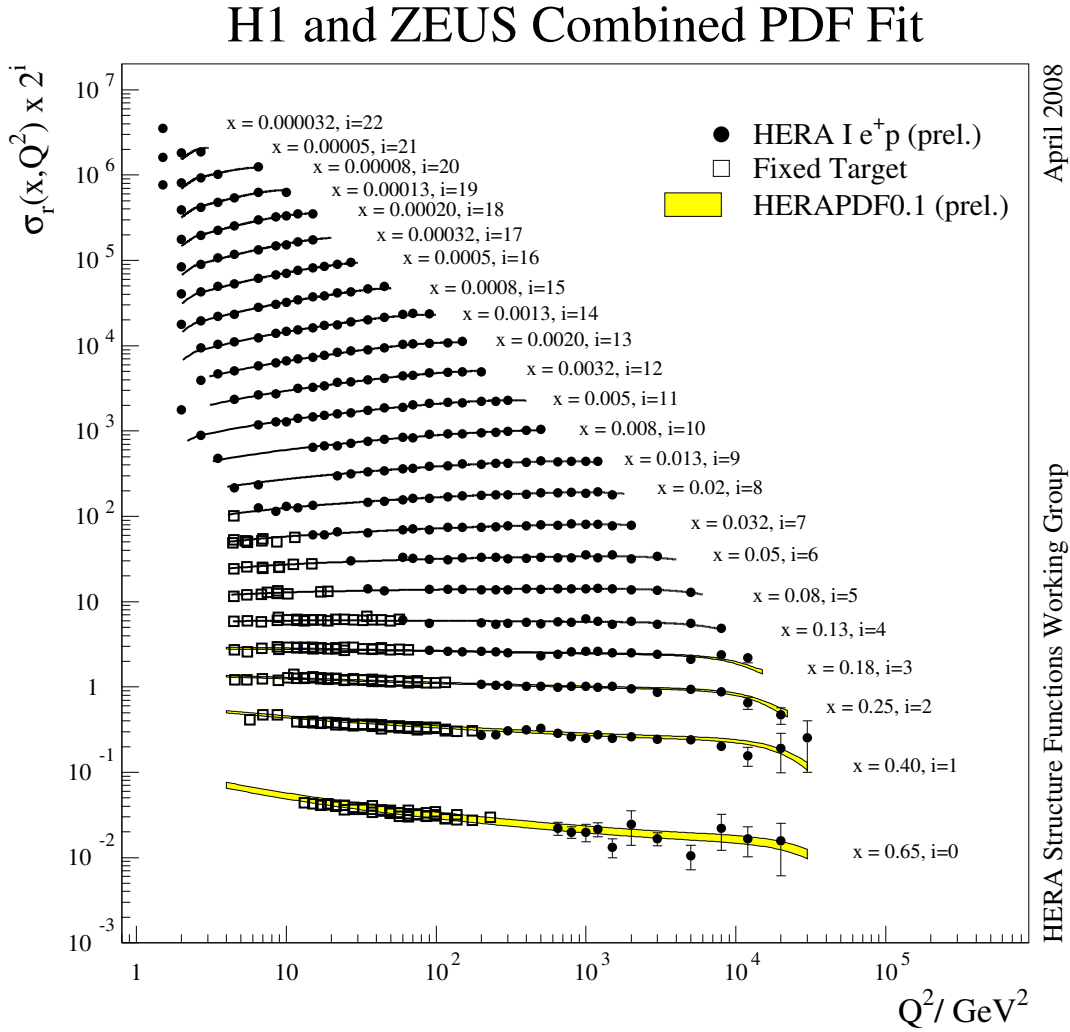


FIGURE 9.2 – Ajustement des distributions partoniques aux données  $e^+p$  de la collaboration H1 et à des données sur cible fixe.

8. CTEQ : J. Pumplin, D.R. Stump, J. Huston, H.L. Lai, P. Nadolsky, W.K. Tung, JHEP **0207** (2002), 012, [hep-ph/0201195]

9. MRSTW : A. D. Martin, W. J. Stirling, R.S. Thorne, G. Watt, Eur.Phys.J. **C70** (2010), 51, [arXiv :1007.2624]

10. ALEKHIN : S. Alekhin, J. Blümlein, S. Klein, S. Moch, Phys. Rev. **D81**, (2010), 014032, [arXiv :0908.3128]

11. HERAPDF : H1 and ZEUS collaborations, Eur. Phys. J. **C73** (2013), 2311, [arXiv :1211.1182]; [arXiv :1506.06042]

12. NNPDF : R. Ball *et al.*, [arXiv :1410.8849].

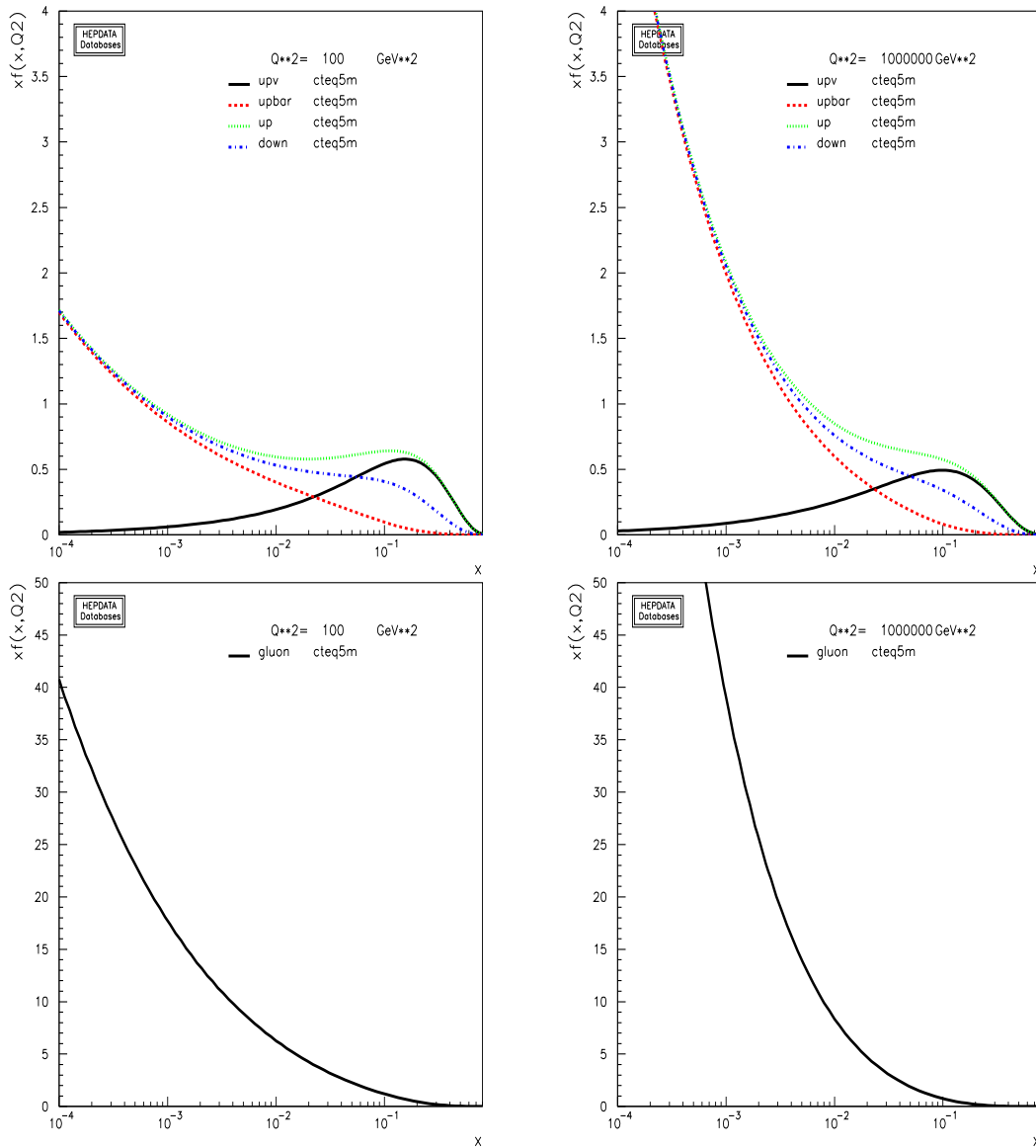


FIGURE 9.3 – Fonctions de distributions des quarks  $u$ ,  $d$  et gluon dans le proton (collaboration CTEQ)

La figure 9.3 montre la dépendance en  $x$  des distributions des quarks  $xu(x, Q^2)$ ,  $xd(x, Q^2)$  et du gluon  $xG(x, Q^2)$  dans le proton, contraintes par l'ajustement aux données DIS. On a choisi deux valeurs de  $Q^2$  :  $Q^2 = 100 \text{ GeV}^2$ , valeur typique pour les expériences sur cible fixe et  $Q^2 = 10^6 \text{ GeV}^2$  d'intérêt pour la physique au LHC. Pour le quark  $u$  la distinction est faite entre la composante de valence  $u_v$  qui domine au delà de  $x = 0,05$  mais tend vers 0 à  $x = 0$ , et celle de la mer (quarks matelots)  $u_s = \bar{u}_s$ . Les quarks matelots dominent largement aux petites valeurs de  $x$  : ils sont engendrés essentiellement par le processus  $gluon \rightarrow q \bar{q}$  ce qui explique la quasi égalité

$u(x, Q^2) \sim d(x, Q^2)$  à petits  $x$ . Comparant la distribution des quarks et du gluon, on voit la dominance des quarks  $u$  et  $d$  sur le gluon aux grandes valeurs de  $x$ , alors que le gluon devient important pour  $x < 0,2$  et domine déjà d'un ordre de grandeur les distributions de quarks pour  $x < 0,001$ . A grands  $Q^2$  toutes les distributions tendent à devenir "piquées" aux petites valeurs de  $x$  : en première approximation les distributions décroissent quand  $Q^2$  augmente pour  $x > 0,05$  et croissent aux valeurs de  $x$  inférieures. Techniquement, cela vient du fait que les termes diagonaux  $P_{qq}$  et  $P_{GG}$ , qui jouent un rôle prédominant dans l'équation d'évolution (9.1.45), sont négatifs à grand  $x$ . Physiquement, cela s'interprète en disant que plus  $Q^2$  est élevé, plus les partons "rayonnent" en se cassant en deux partons d'impulsion plus basse. Ceci explique la présence du pic qui apparaît dans la distribution des quarks à  $x = 0$ , pic dû aux quarks de la mer produits de désintégration du gluon comme déjà observé plus haut. Il faut se rappeler que ces distributions partoniques, surtout celle du gluon, sont entachées d'erreurs expérimentales (statistiques et systématiques) et théoriques (arbitraire du choix des échelles de renormalisation et factorisation). En fait tous les paramétrages modernes utilisent des méthodes très élaborées pour quantifier les erreurs, un problème hautement non trivial.

### 9.1.9 Conclusions

Dans cette section nous avons donné une présentation qualitative et phénoménologique de la violation d'invariance d'échelle de la fonction de structure du proton  $\nu W_2 = F_2$  et par conséquent de la distribution des quarks et du gluon dans un hadron. On a mentionné que l'hypothèse du modèle des partons naïf, à savoir la factorisation de la section hadronique entre distributions partoniques et processus durs, est préservée par les corrections QCD du premier ordre, mais ces distributions acquièrent une dépendance en une échelle de factorisation qui est donnée par les équations DGLAP. La discussion a été menée à l'approximation des logarithmes dominants c'est à dire que les fonctions  $P_{ij}(z)$ , éqs. (9.1.46), sont les coefficients des divergences colinéaires logarithmiques d'un calcul des corrections QCD au premier ordre de la théorie des perturbations. Poursuivre les calculs aux ordres supérieurs conduirait à un développement en  $\alpha_s$  des  $P_{ij}(z)$ . Cette dépendance des fonctions de structure en l'échelle de masse est universelle c'est-à-dire qu'elle est la même quelque soit le processus dur où apparaissent ces fonctions de structure. Résoudre les éqs. DGLAP (9.1.44) et (9.1.45) revient à sommer tous les termes de la série perturbative en  $(\alpha_s \ln M^2)^p$ . Cela introduit une dépendance résiduelle des prédictions théoriques pour la section hadronique d'un ordre supérieur à celui auquel on travaille. Cela peut se voir en se reportant à l'éq. (9.1.25) :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x} \nu W_2(x, Q^2) &= \sum_{\substack{N_f \\ i, \bar{i}}} e_i^2 \left\{ q_i(x, M^2) + \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \right. \\
 &\quad \left. \left[ q_i(z, M^2) \left( P_{qq}\left(\frac{x}{z}\right) \ln \frac{Q^2}{M^2} + f_q\left(\frac{x}{z}\right) \right) + G(z, M^2) \left( P_{qG}\left(\frac{x}{z}\right) \ln \frac{Q^2}{M^2} + f_G\left(\frac{x}{z}\right) \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Prenant la dérivée de cette équation par rapport à  $\ln M^2$  et usant de l'éq. (9.1.24), on voit que le membre de droite est d'ordre  $\alpha_s^2$  pour un calcul mené à l'ordre  $\alpha_s$ . Ceci est une conséquence inéluctable la théorie des perturbations : tout série perturbative tronquée à l'ordre  $\alpha_s^p$  souffre d'une ambiguïté, due au choix de l'échelle de factorisation, d'ordre  $\alpha_s^{p+1}$ . En d'autres termes, les résultats pour deux échelles de factorisation différentes diffèrent par des termes d'ordre  $\alpha_s^{p+1}$ . Cette ambiguïté est souvent l'une des incertitudes dominantes des calculs perturbatifs qu'il est essentiel de

prendre en compte quand on compare théorie et expérience.

La section suivante est consacrée à la dérivation de certains résultats présentés ci-dessus, notamment l'équation d'évolution DGLAP de la distribution du quark. Les calculs seront conduits dans le cadre de la régularisation dimensionnelle.

## 9.2 Violations d'invariance d'échelle : calcul exact

On rappelle le paramétrage, introduit dans la section 6.2, éq. (6.2.7), de l'interaction entre un photon virtuel et un hadron avec les fonctions de structure  $W_1$  et  $W_2$ . Par analogie, pour l'interaction  $\gamma^* \text{quark}(p_1) \rightarrow \text{quark}(p_2)$  on écrit<sup>1</sup> :

$$\widehat{W}^{\mu\nu} = -\widehat{W}_1 \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \widehat{W}_2 \left( p_1^\mu - \frac{p_1 q}{q^2} q^\mu \right) \left( p_1^\nu - \frac{p_1 q}{q^2} q^\nu \right). \quad (9.2.55)$$

Pour notre étude il suffira de considérer la trace en  $n$  dimensions :

$$-g_{\mu\nu} \widehat{W}^{\mu\nu} = (3 - 2\varepsilon) \widehat{W}_1 + \frac{(p_1 q)^2}{q^2} \widehat{W}_2, \quad (9.2.56)$$

qui revient à sommer sur les états de polarisation du photon en jauge de Feynman. Introduisant, pour notre convenance, les fonctions de structure :

$$\widehat{\mathcal{F}}_1 = 2 \widehat{W}_1, \quad \widehat{\mathcal{F}}_2 = \frac{p_1 q}{z} \widehat{W}_2, \quad (9.2.57)$$

on trouve

$$-g_{\mu\nu} \widehat{W}^{\mu\nu} = (1 - \varepsilon) \widehat{\mathcal{F}}_2 + \left( \frac{3}{2} - \varepsilon \right) (\widehat{\mathcal{F}}_1 - \widehat{\mathcal{F}}_2). \quad (9.2.58)$$

### 9.2.1 Calcul du terme de Born

Dans le cadre du modèle des partons naïf l'amplitude de diffusion  $\gamma^* \text{quark} \rightarrow \text{quark}$  est

$$\mathcal{V}_{(0)}^\mu = -i e e_q \mu^\varepsilon \bar{u}(p_2)_j \gamma^\mu u(p_1)_i \delta_{ij}, \quad (9.2.59)$$

où on a explicité les indices de couleur  $i$  et  $j$  des fermions. On ne considère dans la suite qu'un seul type de quark de charge  $e e_q$ . Pour construire la section efficace partonique on doit évaluer, comme en éq. (9.1.6) :

$$\begin{aligned} -g_{\mu\nu} \widehat{W}^{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu} \int \frac{d^{n-1} p_2}{(2\pi)^{n-1} 2p_2} (2\pi)^n \delta^{(n)}(p + q - p_2) \mathcal{V}_{(0)}^\mu (\mathcal{V}_{(0)}^\nu)^* \\ &= -(e e_q \mu^\varepsilon)^2 \int \frac{d^{n-1} p_2}{(2\pi)^{n-1} 2p_2} (2\pi)^n \delta^{(n)}(p + q - p_2) < \frac{\delta_{jj}}{3} > \left[ \frac{1}{2} \text{Tr}((\not{p}_1 + \not{q}) \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_\mu) \right] \\ &= (e e_q \mu^\varepsilon)^2 2\pi \delta^{(+)}(q^2 + 2p_1 q) [4(1 - \varepsilon) p_1 q], \end{aligned} \quad (9.2.60)$$

1. Notez la normalisation différente des fonctions  $W_1$  et  $W_2$  introduite ici comparée à la notation "historique" utilisée dans la section 6.2

où la trace est évaluée en  $n$  dimensions et la moyenne sur le spin et la couleur du fermion a été faite. On définit la section efficace  $\gamma^*$  *quark* en normalisant par le facteur de flux :

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_0^{\gamma^*q} &= \frac{1}{4p_1q} (-g_{\mu\nu} \widehat{W}^{\mu\nu}) \\ &= \frac{2\pi}{2p_1q} (1 - \varepsilon) (ee_q \mu^\varepsilon)^2 \delta(1 - z) \\ &= \frac{2\pi z}{Q^2} (1 - \varepsilon) (ee_q \mu^\varepsilon)^2 \delta(1 - z),\end{aligned}\tag{9.2.61}$$

avec la variable de Bjorken définie au niveau partonique,

$$z = \frac{Q^2}{2p_1q}.\tag{9.2.62}$$

On donne un nom spécifique au coefficient de la fonction  $\delta(1 - z)$ , qui dépend de "l'échelle dure", car il apparaîtra systématiquement dans tous les calculs d'ordre supérieur :

$$\boxed{\widehat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) = \frac{2\pi z}{Q^2} (1 - \varepsilon) \mu^{2\varepsilon}.}\tag{9.2.63}$$

La section efficace partonique, dans l'approximation d'ordre 0 en QCD, est donc simplement :

$$\boxed{\widehat{\sigma}_0^{\gamma^*q} = (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) \delta(1 - z),}\tag{9.2.64}$$

qui se réduit bien à l'éq. (9.1.8) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Le modèle des partons permet d'écrire la section efficace hadronique en convoluant la section efficace partonique avec la distribution du quark  $q_0(z')$ ,  $z'$  fraction d'impulsion du proton portée par le parton. L'impulsion du quark est alors  $p_1 = z'P$  d'où  $z = Q^2/2z'Pq = x/z'$  avec  $x = Q^2/2Pq$  la variable de Bjorken. La section efficace hadronique, calculée à l'ordre le plus bas, est donc :

$$\begin{aligned}\sigma_{Born}^{\gamma^*p}(Q^2, x, \varepsilon) &= (ee_q)^2 \int_0^1 dz' q_0(z') \widehat{\sigma}_0(Q^2, \frac{x}{z'}, \varepsilon) \delta\left(1 - \frac{x}{z'}\right) \\ &= \widehat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) (ee_q)^2 q_0(x),\end{aligned}\tag{9.2.65}$$

qui est factorisée en un terme "courte distance",  $\widehat{\sigma}_0$  (section efficace "dure" dépendant de  $Q^2$  et de  $x$ ), et un terme "longue distance" indépendant de  $Q^2$ ,  $q_0(x)$  la distribution de quark<sup>13</sup>. Ceci est la version en  $n$  dimensions de l'éq. (9.1.9). On note en passant, par comparaison avec l'éq. (9.2.58), l'absence de terme en  $3/2 - \varepsilon$  dans l'équation d'où on obtient la relation :

$$\widehat{\mathcal{F}}_1(x) = \widehat{\mathcal{F}}_2(x),\tag{9.2.66}$$

conséquence du fait que le parton est de spin 1/2.

Il s'agit maintenant de calculer les corrections au premier ordre en QCD au terme de Born. Les calculs sont compliqués et peu de détails seront épargnés au lecteur éventuel. On calculera d'abord

13. Par rapport à la section 9.1 on a changé la notation des arguments des sections efficaces.

la contribution des diagrammes réels : processus Compton  $\gamma^*$  *quark*  $\rightarrow$  *gluon quark*, d'une part et processus de création de paires  $\gamma^*$  *gluon*  $\rightarrow$  *quark antiquark*, d'autre part. Le premier cas fera apparaître des divergences infrarouges et colinéaires d'où la présence de termes en  $1/\varepsilon^2$ . Les divergences infrarouges seront compensées par la contribution des diagrammes virtuels pour ne laisser que des termes en  $1/\varepsilon$ , les divergences colinéaires, dont on montrera qu'ils peuvent tous être absorbés dans une redéfinition de la distribution du quark dans le proton.

### 9.2.2 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contribution de $\gamma^*$ *quark* $\rightarrow$ *gluon quark*

On doit calculer les deux diagrammes de type Compton :



L'élément de matrice est

$$\mathcal{M}^{a,\mu} = (-iee_q\mu^\varepsilon) (-ig\mu^\varepsilon)\bar{u}_2(p_2)_j \left[ \gamma_\mu \frac{i(\not{p}_1 - k)}{(p_1 - k)^2 + i\epsilon} \gamma_\rho \epsilon^\rho + \gamma_\rho \epsilon^\rho \frac{i(\not{p}_2 + k)}{(p_2 + k)^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \right] T_{ji}^a u_1(p_1)_i, \quad (9.2.67)$$

où on note  $k^\rho$  et  $\epsilon^\rho$  respectivement l'impulsion et le vecteur polarisation du gluon.  $T^a$  est la matrice de couleur associée au couplage du gluon de couleur  $a$  aux quarks de couleur  $i, j$ . On vérifie d'abord l'invariance de cette amplitude sous la translation  $\epsilon^\rho \rightarrow \epsilon^\rho + k^\rho$  ce qui signifie que son carré sera indépendant du choix fait pour la somme sur les états de polarisation du gluon. Pour simplifier on choisira la jauge de Feynman avec la relation  $\sum_{polar} \epsilon^\rho \epsilon^{\rho'} = -g^{\rho\rho'}$ . Il faut maintenant trouver l'expression pour  $-g_{\mu\nu} \mathcal{M}^{a,\mu} (\mathcal{M}^{a,\nu})^*$  où on a moyenné/sommé sur les états de polarisation et de couleur des quarks et du gluon. Le terme de couleur (on moyenne sur la couleur du quark initial) se factorise et il s'évalue très facilement : c'est simplement

$$\text{facteur de couleur} = \frac{1}{3} \text{Tr} T^a T^a = \frac{1}{3} c_F \delta_{ii} = c_F \quad (9.2.68)$$

Pour simplifier l'écriture de la partie Lorentz du résultat il est utile d'introduire les variables de Mandelstam :

$$\begin{aligned} (p_1 + q)^2 &= q^2 + 2p_1q = (p_2 + k)^2 = 2p_2k = \hat{s} \\ (p_2 - q)^2 &= q^2 - 2p_2q = (p_1 - k)^2 = -2p_1k = \hat{t} \\ (q - k)^2 &= q^2 - 2qk = (p_2 - p_1)^2 = -2p_1p_2 = \hat{u}. \end{aligned} \quad (9.2.69)$$

En jauge de Feynman pour le gluon et se rappelant les règles de diracologie en  $n$ -dimensions pour l'évaluation des traces on trouve,

1. carré du premier terme :

$$(ee_q\mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 4(1 - \varepsilon)^2 \frac{\hat{s}}{-\hat{t}}$$



2. carré du premier terme :

$$(ee_q\mu^\varepsilon)^2(g\mu^\varepsilon)^2 4(1-\varepsilon)^2 \frac{-\hat{t}}{\hat{s}}$$

3. terme d'interférence :

$$(ee_q\mu^\varepsilon)^2(g\mu^\varepsilon)^2(-8)(1-\varepsilon) \left[ \frac{\hat{u} q^2}{\hat{s} \hat{t}} - \varepsilon \right]$$

où on a pris la moyenne sur le spin du quark initial. Regroupant tous les termes, couleur et Lorentz, on trouve

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma} |\mathcal{M}|_{\gamma^* q}^2 &= -\overline{\Sigma}_{couleur,polar} \mathcal{M}^{a,\mu} (\mathcal{M}_\mu^a)^* \\ &= (ee_q\mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 c_F 4(1-\varepsilon) \left[ (1-\varepsilon) \left( \frac{-\hat{t}}{\hat{s}} + \frac{\hat{s}}{-\hat{t}} \right) - 2 \frac{\hat{u} q^2}{\hat{s} \hat{t}} + 2\varepsilon \right]. \end{aligned} \quad (9.2.70)$$

Cette expression est indépendante du choix de la jauge pour le gluon.

### • Choix du repère

Pour calculer la section efficace  $\gamma^*$  *quark* on peut se placer dans le repère du centre de masse de la collision photon-parton. Les coordonnées des vecteurs sont définies, en  $n$ -dimensions, par :

$$p_1 = (e_1, 0, \dots, e_1) ; \quad q = (q^0, 0, \dots, -e_1) ; \quad k = (k, \dots, k \cos \theta_1), \quad (9.2.71)$$

de sorte que les invariants prennent la forme :

$$e_1 = \frac{\hat{s} + Q^2}{2\sqrt{\hat{s}}} ; \quad \hat{t} = -\frac{(\hat{s} + Q^2)}{2} (1 - \cos \theta_1) ; \quad \hat{u} = -\frac{(\hat{s} + Q^2)}{2} (1 + \cos \theta_1). \quad (9.2.72)$$

L'élément de matrice au carré dépend uniquement de l'angle polaire  $\theta_1$ , et non de l'angle azimutal ou des angles non-physiques.

### • Intégrale sur l'espace de phase

On doit intégrer sur l'espace de phase en  $n$  dimensions pour le quark et le gluon finals :

$$\begin{aligned} PS &= \int \frac{d^{n-1} p_2}{(2\pi)^{n-1} 2e_2} \frac{d^{n-1} k}{(2\pi)^{n-1} 2k} (2\pi)^n \delta^{(n)}(p_1 + q - p_2 - k) \\ &= (2\pi)^{2-n} \int \frac{d^{n-1} k}{2k} d^n p_2 \delta^+((p_1 + q - k)^2) \delta^{(n)}(p_1 + q - p_2 - k) \\ &= (2\pi)^{2-n} \int \frac{k^{n-3}}{2} dk d\Omega_{n-2} \delta(\hat{s} - 2\sqrt{\hat{s}} k) \\ &= (2\pi)^{2-n} \frac{(\sqrt{\hat{s}})^{n-4}}{2^{n-1}} \int d\Omega_{n-2} \end{aligned} \quad (9.2.73)$$

où  $d\Omega_{n-2}$  est l'élément d'angle solide dans un espace à  $n-1$  dimensions (*cf* éq. (3.2.12)). L'impulsion du gluon est contrainte par la relation  $k = \sqrt{\hat{s}}/2$ . Contrairement au calcul, en régulation dimensionnelle, des intégrales des diagrammes en boucles on ne peut pas faire ici l'intégrale sur tous les angles puisque l'angle polaire apparaît explicitement dans l'élément de matrice. On peut

néanmoins adapter les expressions éqs. (3.2.13), (3.2.14) pour faire les intégrales sur les angles non physiques et azimutal et ne garder comme variable que l'angle polaire  $\theta_1$  de sorte que :

$$\begin{aligned} \int d\Omega_{n-2} &= \int_0^\pi (\sin \theta_1)^{n-3} d\theta_1 \int d\Omega_{n-3}, \\ &= 2 \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma((n-2)/2)} \int_0^\pi (\sin \theta_1)^{n-3} d\theta_1 \end{aligned} \quad (9.2.74)$$

d'après (3.2.14). Faisant le changement de variable  $\cos \theta_1 = 2y - 1$  et usant de  $n = 4 - 2\varepsilon$  on trouve :

$$\int d\Omega_{n-2} = \frac{(4\pi)^{1-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dy y^{-\varepsilon} (1-y)^{-\varepsilon} \quad (9.2.75)$$

de sorte que l'intégrale sur l'espace de phase devient :

$$\boxed{PS = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{4\pi}{\hat{s}} \right)^\varepsilon \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dy y^{-\varepsilon} (1-y)^{-\varepsilon},} \quad (9.2.76)$$

valable pour la production de deux partons de masse nulle dans un processus  $2 \rightarrow 2$ . La contribution du processus Compton à la section efficace photon-quark est la convolution du facteur d'espace de phase et de l'amplitude au carré :

$$\hat{\sigma}_1^{\gamma^* q}(Q^2, z, \varepsilon) = \frac{1}{4p_{1q}} PS \bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{\gamma^* q}^2, \quad (9.2.77)$$

que l'on va maintenant évaluer.

### • Cinématique

Se rappelant la définition de la variable de Bjorken au niveau partonique,  $z = Q^2/2p_{1q}$ , on peut exprimer tous les invariants du problème à l'aide de  $Q^2$  et des variables sans dimensions  $y$  et  $z$  :

$$\boxed{\hat{s} = Q^2 \frac{1-z}{z}; \quad \hat{t} = -Q^2 \frac{1-y}{z}; \quad \hat{u} = -Q^2 \frac{y}{z}.} \quad (9.2.78)$$

La positivité de  $\hat{s}$  impose  $z \leq 1$ . D'autre part, se rappelant que le parton porte une fraction  $z' \leq 1$  de l'impulsion du proton et que reliant les variables de Bjorken partonique et hadronique on a  $z' = z/x$  la condition  $z' \leq 1$  impose la restriction

$$\boxed{x \leq z \leq 1.} \quad (9.2.79)$$

Le carré de l'élément de matrice s'écrit :

$$\boxed{\bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{\gamma^* q}^2 = (e e_q \mu^\varepsilon)^2 (g \mu^\varepsilon)^2 \langle c_F \rangle 4(1-\varepsilon) \left[ (1-\varepsilon) \left( \frac{1-y}{1-z} + \frac{1-z}{1-y} \right) + 2 \frac{yz}{(1-y)(1-z)} + 2\varepsilon \right].} \quad (9.2.80)$$

• **Divergences colinéaire et infrarouge**

Se concentrant sur l'intégrale angulaire il faut donc évaluer, à l'aide de l'éq. (3.2.29),

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dy y^{-\varepsilon} (1-y)^{-\varepsilon} \left[ (1-\varepsilon) \left( \frac{1-y}{1-z} + \frac{1-z}{1-y} \right) + 2 \frac{yz}{(1-y)(1-z)} + 2\varepsilon \right] \\ &= \frac{\Gamma(1-\varepsilon)^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left[ -\frac{1}{\varepsilon} \frac{1+z^2}{1-z} - \frac{3}{2} \frac{1}{1-z} + 3 - z - \frac{7}{2} \frac{\varepsilon}{1-z} + 2\varepsilon \right], \end{aligned} \quad (9.2.81)$$

où on n'a gardé que les termes jusqu'à l'ordre  $\varepsilon$ . On voit que les termes en  $1/(1-y)$  seraient divergents en  $y=1$  ( $\Leftrightarrow \hat{t}=0 \Leftrightarrow \cos\theta=1$ ) si  $\varepsilon$  était nul : on a donc bien une divergence colinéaire, quand le gluon est émis parallèlement au quark initial. Rassemblant tous les termes on trouve :

$$\boxed{\hat{\sigma}_1^{\gamma^* q}(Q^2, z, \varepsilon) = (ee_q)^2 \hat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} H_q(z, \varepsilon) \right]}, \quad (9.2.82)$$

où on a mis en évidence le facteur  $\hat{\sigma}_0$ , éq. (9.2.63) caractéristique de la section efficace à l'ordre de Born. Le terme entre crochets contient la contribution QCD, proportionnelle à  $\alpha_s$  et a une expression compliquée :

$$H_q(z, \varepsilon) = \langle c_F \rangle \left[ -\frac{1}{\varepsilon} \frac{1+z^2}{1-z} - \frac{3}{2} \frac{1}{1-z} + 3 - z - \frac{7}{2} \frac{\varepsilon}{1-z} + 2\varepsilon \right] \quad (9.2.83)$$

L'origine du terme  $z^\varepsilon(1-z)^{-\varepsilon}$  dans l'équation ci-dessus est la substitution

$$\left( \frac{1}{\hat{s}} \right)^\varepsilon = \left( \frac{1}{Q^2} \right)^\varepsilon z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} \quad (9.2.84)$$

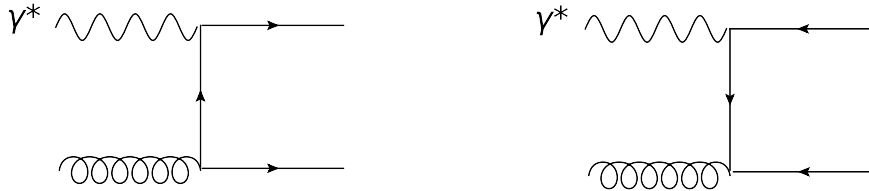
dans le facteur d'espace de phase éq. (9.2.76). Ce terme est important car il permettra la régularisation des divergences infrarouges lors du calcul de la diffusion  $\gamma^*$  *proton* qui nécessitera l'intégration sur la variable  $z'$ , donc sur  $z = x/z'$ . En effet, l'impulsion  $k$  du gluon est, d'après la contrainte de la fonction  $\delta$  dans l'équation (9.2.73),

$$k = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} = \frac{\sqrt{Q^2}}{2} \sqrt{\frac{1-z}{z}} \quad (9.2.85)$$

qui s'annule en  $z=1 \Rightarrow k=0$ . Les termes en  $1/(1-z)$  dans la fonction  $H_q(z, \varepsilon)$  conduisent à une divergence quand on intègre sur l'impulsion du quark initial pour construire la section efficace au niveau hadronique.

### 9.2.3 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contribution de $\gamma^*$ *gluon* $\rightarrow$ *quark antiquark*

Les deux diagrammes à évaluer sont :



Le carré de l'élément de matrice de ce processus peut être obtenu par croisement à partir de l'éq. (9.2.70) : le gluon sortant d'impulsion  $k$  du processus Compton devient entrant d'impulsion  $p_1$ , d'où  $k \rightarrow -p_1$ , tandis que le quark entrant d'impulsion  $p_1$  devient un antiquark sortant d'impulsion  $k$ , d'où  $p_1 \rightarrow -k$ , les autres impulsions restant inchangées, de sorte que les variables de Mandelstam deviennent :

$$\begin{array}{ll} \text{Compton} & \text{création de paire} \\ (q + p_1)^2 = \hat{s} & \rightarrow (q - k)^2 = \hat{u} \\ (q - p_2)^2 = \hat{t} & \rightarrow (q - p_2)^2 = \hat{t} \\ (q - k)^2 = \hat{u} & \rightarrow (q + p_1)^2 = \hat{s} \end{array} \quad (9.2.86)$$

Avant de substituer ces nouvelles variables dans l'éq. (9.2.70) il faut se rappeler de modifier la normalisation du fait de la moyenne sur les états de couleur et polarisation des particules entrantes :

- pour la couleur : Compton =  $\frac{1}{3}\Sigma_{couleur}$   $\rightarrow$  création de paire =  $\frac{1}{8}\Sigma_{couleur}$

- pour le spin : pas de changement car quark et gluon ont chacun deux états de polarisation,

Donc au lieu du facteur  $c_F$  on aura  $3 c_F/8 = 1/2$  et ainsi le carré de l'élément de matrice pour la création d'une paire  $q \bar{q}$  est :

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma} |\mathcal{M}|_{\gamma^* G}^2 &= -\overline{\Sigma}_{couleur,polar} \mathcal{M}^{a,\mu} (\mathcal{M}_\mu^a)^* \\ &= (ee_q \mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 < \frac{1}{2} > 4(1 - \varepsilon) \left[ (1 - \varepsilon) \left( \frac{\hat{t}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{t}} \right) + 2 \frac{\hat{s} q^2}{\hat{u} \hat{t}} - 2\varepsilon \right], \end{aligned} \quad (9.2.87)$$

où on n'a pas oublié un facteur  $-1$  global du fait que l'on a croisé un fermion (le carré de l'élément de matrice doit être positif). On utilise ensuite les relations éqs. (9.2.78) pour écrire notre expression en fonction des variables invariantes d'échelle  $y$  et  $z$  :

$$\boxed{\overline{\Sigma} |\mathcal{M}|_{\gamma^* G}^2 = (ee_q \mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 < \frac{1}{2} > 4(1 - \varepsilon) \left[ (1 - \varepsilon) \left( \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y} - 2 \right) - 2z(1-z) \left( \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y} \right) - 2\varepsilon \right].} \quad (9.2.88)$$

### • Intégrale sur l'espace de phase

L'intégrale sur l'impulsion des partons finals se fait de la même façon que pour la diffusion Compton, à l'aide de l'éq. (9.2.76). Négligeant pour le moment la normalisation, on a pour l'intégrale sur la variable angulaire  $y$  :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dy y^{-\varepsilon} (1-y)^{-\varepsilon} \left[ (1 - \varepsilon) \left( \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y} - 2 \right) - 2z(1-z) \left( \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y} \right) - 2\varepsilon \right] \\ &= \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)^2}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \left[ -\frac{2}{\varepsilon} (z^2 + (1-z)^2) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (9.2.89)$$

Le facteur  $-2/\varepsilon$  est issu des divergences colinéaires à  $y = 0$  ( $\hat{t} = 0 \Rightarrow \bar{q} //$  gluon, diffusion dure  $\gamma^*$  *quark*) et  $y = 1$  ( $\hat{u} = 0 \Rightarrow q //$  gluon, diffusion dure  $\gamma^*$  *antiquark*). D'autre part, il n'y a dans ce processus pas de divergences infrarouges car les conditions cinématiques empêchent le gluon d'avoir une énergie nulle : en effet, cette dernière est d'après les éqs. (9.2.72) et (9.2.78) :

$$e_1 = \frac{\sqrt{Q^2}}{2} \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} \quad (9.2.90)$$

avec  $x < z < 1$ . On reconstruit alors la section efficace au niveau partonique avec tous les facteurs de normalisation (de l'élément de matrice, de l'espace des phases et du flux) pour trouver :

$$\boxed{\widehat{\sigma}_1^{\gamma^* G}(Q^2, z, \varepsilon) = (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} H_G(z, \varepsilon) \right]} \quad (9.2.91)$$

avec

$$H_G(z, \varepsilon) = \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle \left[ -\frac{1}{\varepsilon} (z^2 + (1-z)^2) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right]. \quad (9.2.92)$$

Il n'y a pas de singularité en  $z$  dans l'intervalle  $x \leq z \leq 1$  donc pas de divergence infrarouge dans le processus de création de paire  $q \bar{q}$ .

#### 9.2.4 Diffusion $\gamma^*$ proton : contribution des termes réels

Regroupant toutes les contributions déjà calculées, Born éq. (9.2.61), Compton éq. (9.2.82) et création de paire éq. (9.2.91), et appliquant l'hypothèse du modèle des partons naïf pour construire la section  $\gamma^*$  proton, on peut écrire, en rappelant que  $z = x/z'$  :

$$\sigma_{réel}^{\gamma^* p}(Q^2, x, \varepsilon) = \int_x^1 dz' \left\{ q_0(z') \left[ \widehat{\sigma}_0^{\gamma^* q}(Q^2, \frac{x}{z'}, \varepsilon) + \widehat{\sigma}_1^{\gamma^* q}(Q^2, \frac{x}{z'}, \varepsilon) \right] + G_0(z') \widehat{\sigma}_1^{\gamma^* G}(Q^2, \frac{x}{z'}, \varepsilon) \right\}. \quad (9.2.93)$$

Les bornes d'intégration sont données par l'éq. (9.2.79). Faisant le changement de variable d'intégration  $z' \rightarrow z$  et substituant les expressions pour les différentes composantes de la section efficace on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{réel}^{\gamma^* p}(Q^2, x, \varepsilon) &= (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ q_0\left(\frac{x}{z}\right) \delta(1-z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} \left[ q_0\left(\frac{x}{z}\right) H_q(z, \varepsilon) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) H_G(z, \varepsilon) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.2.94)$$

On reconnaît facilement que cette expression est factorisée en une section efficace dure, la même que celle du terme de Born, et une intégrale qui contient, à l'ordre  $\alpha_s$ , des divergences colinéaires et, dans le terme  $H_q(z, \varepsilon)$ , des divergences à  $z = 1$  qu'il s'agit maintenant d'extraire.

#### • Extraction des divergences infrarouges de la diffusion Compton

Pour cela il est nécessaire d'évaluer des expressions potentiellement divergentes telles que :

$$\int_0^1 dz z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} \frac{F(z)}{1-z}, \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 dz z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} \frac{F(z)}{1-z}, \quad (9.2.95)$$

qui apparaissent dans la fonction  $H_q(z, \varepsilon)$  de l'éq. (9.2.83). Il s'agit de les exprimer sous la forme de pôles en  $\varepsilon$  et de termes finis. Dans les expressions ci-dessus la fonction  $F(z)$  est une fonction

arbitraire supposée régulière à  $z = 1$ . Pour cela on développe l'intégrand de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} \frac{F(z)}{1-z} &= \int_0^1 dz \frac{F(z)}{(1-z)^{1+\varepsilon}} (1 + \varepsilon \ln z) \\ &= \int_0^1 dz \frac{F(z) - F(1)}{(1-z)^{1+\varepsilon}} + F(1) \int_0^1 dz \frac{1}{(1-z)^{1+\varepsilon}} + \varepsilon \int_0^1 dz F(z) \frac{\ln z}{(1-z)^{1+\varepsilon}} \\ &= \int_0^1 dz \frac{F(z) - F(1)}{(1-z)} (1 - \varepsilon \ln(1-z)) - \frac{1}{\varepsilon} F(1) + \varepsilon \int_0^1 dz F(z) \frac{\ln z}{(1-z)}. \end{aligned} \quad (9.2.96)$$

Puisque le terme  $(F(z) - F(1))/(1-z)$  est régulier en  $z = 1$ , le développement en  $\varepsilon$  de l'intégrand du premier terme est justifié. Le deuxième terme est évalué grâce à l'éq. (3.2.29), quant au dernier, le facteur  $\ln z/(1-z)$  est régulier en  $z = 1$  et on peut donc prendre  $\varepsilon = 0$  dans l'exposant du dénominateur. On introduit les notations standards suivantes :

$$\boxed{\int_0^1 dz \frac{F(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{F(z) - F(1)}{(1-z)}}$$

$$\boxed{\int_0^1 dz F(z) \left( \frac{\ln(1-z)}{(1-z)} \right)_+ = \int_0^1 dz (F(z) - F(1)) \frac{\ln(1-z)}{(1-z)}}. \quad (9.2.97)$$

On peut donc écrire l'intégrale ci-dessus de la façon suivante :

$$\int_0^1 dz z^\varepsilon (1-z)^{-1-\varepsilon} F(z) = \int_0^1 dz F(z) \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \delta(1-z) + \frac{1}{(1-z)_+} + \varepsilon \frac{\ln z}{1-z} - \varepsilon \left( \frac{\ln(1-z)}{(1-z)} \right)_+ \right\}. \quad (9.2.98)$$

En fait, l'expression des sections efficaces, telles que (9.2.93), implique une intégrale sur la variable  $z$  de  $x \neq 0$  à 1. On définira donc :

$$\boxed{\int_x^1 dz \frac{F(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{F(z)}{(1-z)_+} - \int_0^x dz \frac{F(z)}{(1-z)}}$$

$$\boxed{\int_x^1 dz F(z) \left( \frac{\ln(1-z)}{(1-z)} \right)_+ = \int_0^1 dz F(z) \left( \frac{\ln(1-z)}{(1-z)} \right)_+ - \int_0^x dz F(z) \frac{\ln(1-z)}{(1-z)}}. \quad (9.2.99)$$

L'application de cette technique à l'évaluation de la contribution du terme Compton éq. (9.2.83) à la section efficace hadronique permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\int_0^1 \frac{dz}{z} q_0\left(\frac{x}{z}\right) z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} H_q(z, \varepsilon) = \int_0^1 \frac{dz}{z} q_0\left(\frac{x}{z}\right) F_q(z, \varepsilon) \quad (9.2.100)$$

où on a défini :

$$\begin{aligned} F_q(z, \varepsilon) = \langle c_F \rangle &\left[ \frac{2}{\varepsilon^2} \delta(1-z) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2\varepsilon} \delta(1-z) + \frac{7}{2} \delta(1-z) \right. \\ &\left. + (1+z^2) \left( \frac{\ln(1-z)}{(1-z)} \right)_+ - \frac{3}{2} \frac{1}{(1-z)_+} - \frac{1+z^2}{1-z} \ln z + 3 - z \right]. \end{aligned} \quad (9.2.101)$$

La présence de termes en  $\delta(1-z)$  et des distributions " + " sont caractéristiques des divergences infrarouges. Si de plus on a une divergence colinéaire, cela engendre des facteurs tels que  $\delta(1-z)/\varepsilon^2$  ainsi que  $(\ln(1-z)/(1-z))_+$ .

L'intégrale sur  $z$  de  $H_G(z, \varepsilon)$ , éq. (9.2.92), ne présente pas de difficultés (pas de divergence infrarouge) et on trouve :

$$\int_0^1 \frac{dz}{z} G_0\left(\frac{x}{z}\right) z^\varepsilon (1-z)^{-\varepsilon} H_G(z, \varepsilon) = \int_0^1 \frac{dz}{z} G_0\left(\frac{x}{z}\right) F_G(z, \varepsilon) \quad (9.2.102)$$

avec

$$F_G(z, \varepsilon) = \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle (z^2 + (1-z)^2) \left[ -\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{1-z}{z} \right]. \quad (9.2.103)$$

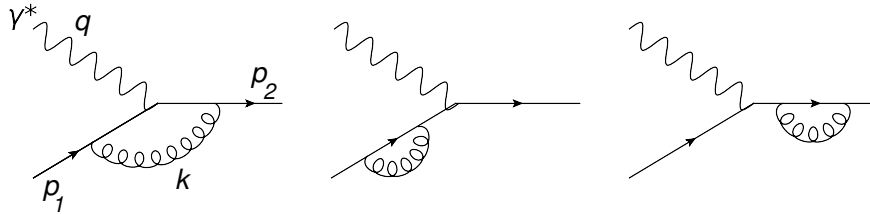
Regroupant toutes les contributions réelles, après avoir extrait les divergences infrarouges, l'équation (9.2.94) devient :

$$\boxed{\sigma_{r\acute{e}el}^{\gamma^* p}(Q^2, x, \varepsilon) = (ee_q)^2 \hat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ q_0\left(\frac{x}{z}\right) \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left[ q_0\left(\frac{x}{z}\right) F_q(z, \varepsilon) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) F_G(z, \varepsilon) \right] \right\}. \quad (9.2.104)}$$

Les fonctions  $F_q$  et  $F_G$ , ne sont autres que, respectivement,  $z^\varepsilon(1-z)^\varepsilon H_q$  et  $z^\varepsilon(1-z)^\varepsilon H_G$  de l'éq. (9.2.94) où on a explicité le comportement infrarouge.

### 9.2.5 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contribution des termes virtuels

Les diagrammes à calculer sont :



On travaille en jauge de Landau : on a vu qu'alors la correction de self-énergie est strictement nulle (éq. 8.2.11) pour des fermions de masse nulle. En revanche le calcul de la correction au vertex est long et pénible. Avec le choix des impulsions de la figure le terme à calculer est (voir la section (4.3.1) pour le calcul QED en jauge de Feynman) :

$$\mathcal{V}_{(1)}^\mu = -iee_q\mu^\varepsilon (-ig\mu^\varepsilon)^2 \bar{u}(p_2)_j \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \left\{ \frac{\gamma_\rho(\not{p}_2 + \not{k})\gamma^\mu(\not{p}_1 + \not{k})\gamma^\rho}{(p_2 + k)^2(p_1 + k)^2 k^2} - \frac{\not{k}(\not{p}_2 + \not{k})\gamma^\mu(\not{p}_1 + \not{k})\not{k}}{(p_2 + k)^2(p_1 + k)^2 (k^2)^2} \right\} T_{jk}^a T_{ki}^a u(p_1)_i, \quad (9.2.105)$$

où on somme les couleurs  $i$  et  $j$  des quarks et  $a$  du gluon. Le facteur de couleur se réduit à  $c_F \delta_{ji}$ . Introduisant deux paramètres de Feynman, on peut linéariser les dénominateurs :

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p_2 + k)^2 (p_1 + k)^2 k^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 + q^2 y^2 x(1-x) + i\epsilon)^3}$$

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p_2 + k)^2 (p_1 + k)^2 (k^2)^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy (1-y) \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 + q^2 y^2 x(1-x) + i\epsilon)^4},$$

où l'impulsion dans la boucle  $l$  est définie par  $l = k + y(xp_1 + (1-x)p_2)$ . Après réduction de la trace on peut réécrire le vertex à une boucle, en supposant les quarks  $p_1$  et  $p_2$  sur couche de masse (i.e.  $\not{p}_1 u(p_1)_i = \bar{u}(p_2)_j \not{p}_2 = 0$ ),

$$\mathcal{V}_{(1)}^\mu = -ie e_q \mu^\varepsilon (g\mu^\varepsilon)^2 \langle c_F \rangle \bar{u}(p_2)_j \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \left\{ \frac{(1-2\varepsilon)l^2 \gamma^\mu - 4(1-\varepsilon) l l^\mu}{(l^2 + q^2 y^2 x(1-x) + i\epsilon)^3} \right. \quad (9.2.106)$$

$$\left. + \frac{(-2+y-(1-2\varepsilon)y^2 x(1-x))q^2}{(l^2 + q^2 y^2 x(1-x) + i\epsilon)^3} \gamma^\mu - 3(1-y) \frac{4p_1 l p_2 l + y^2 x(1-x)(q^2)^2}{(l^2 + q^2 y^2 x(1-x) + i\epsilon)^4} \gamma^\mu \right\} u(p_1)_j.$$

Seul le premier terme est potentiellement divergent dans l'ultraviolet,  $\int dl^n / l^4 \sim \int dl / l^{1+2\varepsilon}$  : il est facilement évalué à l'aide de l'éq. (3.2.22) qui permet de réduire le terme  $\not{l} l^\mu$  à  $l^2 \gamma^\mu / 2(2-\varepsilon)$  et de l'éq. (3.2.23) qui permet d'effectuer l'intégrale sur l'impulsion de la boucle. Sa contribution au vertex est alors :

$$-ie e_q \mu^\varepsilon (g\mu^\varepsilon)^2 \langle c_F \rangle \bar{u}(p_2)_j \gamma^\mu u(p_1)_j \int_0^1 dx \int_0^1 dy y \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi}{-q^2 y^2 x(1-x) + i\epsilon} \right)^\varepsilon (-3\varepsilon + 2\varepsilon^2) \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$= -ie e_q \mu^\varepsilon \langle c_F \rangle \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi \mu^2}{-q^2 + i\epsilon} \right)^\varepsilon \bar{u}(p_2)_j \gamma^\mu u(p_1)_j \int_0^1 dx \int_0^1 dy y^{1-2\varepsilon} x^{-\varepsilon} (1-x)^{-\varepsilon} (-3+2\varepsilon) \Gamma(1+\varepsilon)$$

$$= -ie e_q \mu^\varepsilon \langle c_F \rangle \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi \mu^2}{-q^2 + i\epsilon} \right)^\varepsilon \left( -\frac{3}{2} \right) \frac{\Gamma(1+\varepsilon)(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \bar{u}(p_2)_j \gamma^\mu u(p_1)_j, \quad (9.2.107)$$

où on a négligé des termes d'ordre  $\varepsilon$ . On observe que la divergence ultraviolette de l'intégrale sur l'impulsion (voir la première ligne) est compensée par le coefficient d'ordre  $\varepsilon$ . Ceci est en accord avec le résultat obtenu en QED où on a montré que vertex et self-énergie avaient les mêmes divergences ultraviolettes (voir sec. 4.3) : en l'occurrence, en jauge de Landau, ni le vertex ni la self-énergie n'ont de divergences UV. Si les deux derniers termes de l'équation (9.2.106) ne présentent pas de divergences lors de l'intégration sur l'impulsion  $l$ , cette dernière engendre cependant des termes de type  $y^{-1-2\varepsilon} x^{-1-\varepsilon} (1-x)^{-1-\varepsilon}$  et  $y^{-2\varepsilon} x^{-1-\varepsilon} (1-x)^{-1-\varepsilon}$  qui conduisent finalement à des termes  $1/\varepsilon^2$  et  $1/\varepsilon$ , signes de singularités colinéaires et infrarouges. L'éq. (3.2.29) permet de faire les intégrales  $\int dx dy$  et un usage immodéré de la formule de récursion sur les fonctions  $\Gamma$ , éq. (3.2.18), conduit finalement au résultat relativement simple où on a inclus tous les termes de l'éq. (9.2.105) :

$$\mathcal{V}_{(1)}^\mu = \mathcal{V}_{(0)}^\mu \langle c_F \rangle \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi \mu^2}{-q^2 + i\epsilon} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 8 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\}. \quad (9.2.108)$$

On remarque que la contribution des termes en boucle à la diffusion  $\gamma^* \text{quark} \rightarrow \text{quark}$  est simplement un facteur multiplicatif à l'amplitude de Born et on peut écrire :

$$\mathcal{V}_{(1)}^\mu = \mathcal{V}_{(0)}^\mu \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi \mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} V_1(\varepsilon) \quad (9.2.109)$$



avec (en jauge de Landau)

$$V_1(\varepsilon) = \langle c_F \rangle \frac{1}{2} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 8 - \frac{\pi^2}{3} \right\} \quad (9.2.110)$$

où on a utilisé la relation

$$\Gamma(1 + \varepsilon)\Gamma(1 - \varepsilon) = 1 + \varepsilon^2 \frac{\pi^2}{6}, \quad (9.2.111)$$

et le fait que  $-q^2 = Q^2 > 0$  permet d'ignorer le facteur  $i\varepsilon$  associé à  $-q^2$ . Finalement la contribution des termes virtuels à la section efficace qui est deux fois la partie réelle de l'interférence du terme de Born avec la correction au vertex est donc simplement :

$$\boxed{\widehat{\sigma}_{virtuel}^{\gamma^* q}(Q^2, z, \varepsilon) = (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) \delta(1 - z) \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} 2V_1(\varepsilon)} \quad (9.2.112)$$

On remarque que la structure de cette équation est très similaire à celle des contributions partoniques réelles.

### 9.2.6 Diffusion $\gamma^*$ proton au premier ordre de QCD

Regroupant tous les termes, Born, contributions réelles éq. (9.2.104) et contributions virtuelles éq. (9.2.112) on a :

$$\begin{aligned} \sigma^{\gamma^* p}(Q^2, x, \varepsilon) &= (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ q_0\left(\frac{x}{z}\right) \delta(1 - z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \left[ q_0\left(\frac{x}{z}\right) \left( F_q(z, \varepsilon) + 2V_1(\varepsilon) \delta(1 - z) \right) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) F_G(z, \varepsilon) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.2.113)$$

Se reportant aux éqs. (9.2.101) et (9.2.110) on voit facilement que le terme en  $1/\varepsilon^2$  de la correction virtuelle  $V_1(\varepsilon)$  compense un terme équivalent mais de signe opposé inclus dans la contribution Compton  $F_q(z, \varepsilon)$ . D'autre part, les morceaux en  $1/\varepsilon$  de ces deux contributions se combinent pour former l'expression :

$$-\frac{1}{\varepsilon} P_{qq}(z) = -\frac{1}{\varepsilon} \langle c_F \rangle \left( \frac{1 + z^2}{(1 - z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1 - z) \right). \quad (9.2.114)$$

L'autre terme divergent subsistant dans l'éq. (9.2.113) est contenu dans  $F_G(z, \varepsilon)$  et on le note :

$$-\frac{1}{\varepsilon} P_{qG}(z) = -\frac{1}{\varepsilon} \langle \frac{1}{2} \rangle (z^2 + (1 - z)^2). \quad (9.2.115)$$

Rétablissant tous les impedimenta associés à ces termes divergents on peut ré-écrire la diffusion  $\gamma^*$  proton en séparant termes divergents et finis quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} \sigma^{\gamma^* p}(Q^2, x, \varepsilon) &= (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ q_0\left(\frac{x}{z}\right) \delta(1 - z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \left( -\frac{1}{\varepsilon} \right) \left[ q_0\left(\frac{x}{z}\right) P_{qq}(z) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) P_{qG}(z) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[ q_0\left(\frac{x}{z}\right) f_q(z) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) f_G(z) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.2.116)$$

Les termes finis,

$$\begin{aligned} f_q(z) &= \langle c_F \rangle \left( \frac{7}{2} \delta(1-z) + (1+z^2) \left( \frac{\ln(1-z)}{(1-z)} \right)_+ - \frac{3}{2} \frac{1}{(1-z)_+} - \frac{1+z^2}{1-z} \ln z + 3 - z \right) \\ f_G(z) &= \langle \frac{1}{2} \rangle (z^2 + (1-z)^2) \ln \frac{1-z}{z}, \end{aligned} \quad (9.2.117)$$

sont obtenus à partir des équations (9.2.101), (9.2.110) et (9.2.103). Dans l'esprit du modèle des partons on donne un nom à l'intégrale contenant le terme de Born et tous les morceaux divergents : c'est une fonction de  $x$  et de  $Q^2$  que l'on suppose finie (comme on le justifiera plus bas) et qui est notée, sans surprise (c'est la version en régularisation dimensionnelle de l'éq. (9.1.17)) :

$$\boxed{q(x, Q^2) = q_0(x) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( q_0\left(\frac{x}{z}\right) P_{qq}(z) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) P_{qG}(z) \right)}, \quad (9.2.118)$$

de telle sorte que la section efficace s'écrit relativement simplement :

$$\boxed{\sigma^{\gamma^*p}(Q^2, x) = \left[ \frac{2\pi x}{Q^2} \right] (ee_q)^2 \left[ q(x, Q^2) + \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( q\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) f_q(z) + G\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) f_G(z) \right) \right]}. \quad (9.2.119)$$

Pour obtenir cette expression on a fait un certain nombre d'approximations toutes parfaitement justifiées dans le cadre d'un développement perturbatif. Il y a également un brin d'anticipation. Le premier terme est évident : il résulte trivialement de la substitution de l'éq. (9.2.118) dans l'éq. (9.2.116) et l'on a pris  $\varepsilon = 0$  puisque les pôles en  $\varepsilon$  ont disparu. Ce terme est identique à l'expression du modèle des partons naïf sauf que la distribution partonique dépend de l'échelle  $Q^2$ . Le deuxième terme d'ordre  $\alpha_s$  est la première correction QCD à la diffusion profondément inélastique et les fonctions  $f_q(z)$  et  $f_G(z)$  sont calculables et données en (9.2.117). A l'ordre auquel le calcul est conduit il est justifié d'avoir fait, dans ce terme, la substitution  $q_0(\frac{x}{z}) \rightarrow q(\frac{x}{z}, Q^2)$  qui engendre des corrections d'ordre  $\alpha_s^2$  qui sont donc hors du cadre de l'approximation d'ordre  $\alpha_s$  que l'on considère ici. De même pour la substitution  $G_0(\frac{x}{z}) \rightarrow G(\frac{x}{z}, Q^2)$ , anticipant le fait que l'on a une relation similaire à l'éq. (9.2.118) pour la distribution du gluon. Finalement le choix  $\alpha_s \rightarrow \alpha_s(Q^2)$  est (relativement) arbitraire et montre seulement que l'on a choisi de travailler dans le cadre d'une théorie renormalisée à  $\mu^2 = Q^2$ . Il est inutile de préciser que l'on a pris  $\varepsilon = 0$  partout puisque tous les termes dans (9.2.119) sont finis. L'équation dérivée ci-dessus est bien l'éq. (9.1.18), assénée au lecteur en sec. 9.1.

### 9.2.7 Schémas de factorisation et équation DGLAP

La relation (9.2.118) définit le schéma de factorisation  $\overline{MS}$  (par analogie avec le schéma de renormalisation). En effet, développant en  $\varepsilon$  les termes singuliers on a :

$$q(x, Q^2) = q_0(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( -\frac{1}{\varepsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( q_0\left(\frac{x}{z}\right) P_{qq}(z) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) P_{qG}(z) \right), \quad (9.2.120)$$

et l'on voit que tous les termes  $1/\varepsilon + \ln 4\pi - \gamma$  sont absorbés dans la redéfinition de la distribution de quarks avec le choix  $\mu^2 = Q^2$ . On aurait pu définir la distribution partonique à une échelle

$M^2 \neq Q^2$  et/ou inclure des termes finis  $c_q(z)$ ,  $c_G(z)$  arbitraires, par exemple :

$$q(x, M^2) = q_0(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( -\frac{1}{\varepsilon} - \ln 4\pi + \gamma + \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( q_0\left(\frac{x}{z}\right) P_{qq}(z) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) P_{qG}(z) \right), \\ + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( q_0\left(\frac{x}{z}\right) c_q(z) + G_0\left(\frac{x}{z}\right) c_G(z) \right) \quad (9.2.121)$$

auquel cas l'expression de la section efficace hadronique aurait été (avec un couplage renormalisé à  $M^2$ ) :

$$\sigma^{\gamma^*p}(Q^2, x) = (ee_q)^2 \left[ \frac{2\pi x}{Q^2} \right] \left\{ q(x, M^2) + \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( q\left(\frac{x}{z}, M^2\right) (P_{qq}(z) \ln \frac{Q^2}{M^2} + f_q(z) - c_q(z)) \right. \right. \\ \left. \left. + G\left(\frac{x}{z}, M^2\right) (P_{qG}(z) \ln \frac{Q^2}{M^2} + f_G(z) - c_G(z)) \right) \right\} \quad (9.2.122)$$

qui est l'expression la plus générale de la section efficace, pour un choix arbitraire de l'échelle de factorisation  $M$  et du schéma de factorisation défini par  $c_q(z)$  et  $c_G(z)$ . Le choix  $f_q(z) = c_q(z)$ ,  $f_G(z) = c_G(z)$  et  $M^2 = Q^2$ , autrefois populaire, définit le schéma de renormalisation *DIS* dans lequel la section efficace garde la même forme, à l'ordre  $\alpha_s$ , qu'à l'ordre de Born

$$\boxed{\sigma^{\gamma^*p} = (ee_q)^2 \left[ \frac{2\pi x}{Q^2} \right] q(x, Q^2)} \quad (9.2.123)$$

toutes les corrections d'ordre supérieur ayant été absorbées dans la définition de la distribution partonique avec violation de l'invariance d'échelle. Il est évident qu'un changement d'échelle  $M^2$  n'affecte pas les prédictions puisque la variation du premier terme  $q(x, M^2)$ , est compensée exactement par une variation opposée des termes en  $\ln Q^2/M^2$ .

### • Equation DGLAP

Prenant la dérivée par rapport à  $M^2$  de l'éq. (9.2.121) on trouve

$$\boxed{M^2 \frac{dq(x, M^2)}{dM^2} = \frac{\alpha_s(M^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left( q\left(\frac{x}{z}, M^2\right) P_{qq}(z) + G\left(\frac{x}{z}, M^2\right) P_{qG}(z) \right)}, \quad (9.2.124)$$

où toutes les divergences de l'éq. (9.2.121) ont disparu. La solution de cette équation intégral-différentielle permettra de "prédire"  $q(x, M^2)$ ,  $\forall x, M^2$ , connaissant  $q(x, M_0^2)$  à une valeur de référence de l'échelle de masse : on a vu que cela revenait à faire une sommation à tous les ordres des corrections dominantes. On peut noter qu'à ce niveau d'approximation (LO) l'équation d'évolution est indépendante du schéma de factorisation,  $\overline{MS}$  ou *DIS* ou autre. Revenant à l'éq. (9.2.122), on observe que la prédiction théorique pour  $\sigma^{\gamma^*p}(Q^2, x)$ , connaissant  $q(x, M^2)$  solution de l'éq. (9.2.124), exhibera une dépendance en l'échelle de factorisation  $M$  puisque maintenant la variation de  $q(x, M^2)$  est sommée à tous les ordres tandis que le terme compensatoire n'est évalué qu'au premier ordre en  $\alpha_s$ , mais l'ambiguïté est en principe petite puisque d'ordre  $\alpha_s^2$ . Il est courant lors de l'étude d'un processus caractérisé par une échelle  $Q^2$  de faire varier l'échelle de factorisation entre  $Q^2/4$  et  $4Q^2$  (le facteur 4 est totalement arbitraire!) et d'appeler la variation correspondante

”erreur théorique”.

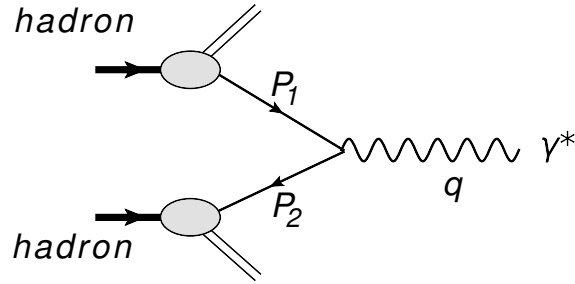
On rappelle que l'éq. (9.2.124) fait référence à une seule saveur de quark. Les équations DGLAP complètes sont données en éqs. (9.1.45) et (9.1.44). Espérons que le lecteur n'est pas trop déprimé par la lourdeur des calculs présentés dans cette section et qu'il ne renoncera pas à approfondir ses connaissances en QCD perturbatif.

### 9.3 Diffusion Drell-Yan

Ce processus du type  $hadron\ hadron \rightarrow \gamma^* X$  fait donc intervenir la convolution de deux distributions partoniques dans l'état initial et on montrera que les divergences colinéaires subsistant dans un calcul d'ordre supérieur se factorisent comme dans l'éq. (9.2.121) ce qui permet d'affirmer l'universalité de la définition des distributions violant l'invariance d'échelle puisque la relation entre les distribution partoniques ”nues” et celles renormalisés ne dépendent pas du processus auquel elles participent.

#### 9.3.1 Calcul du terme de Born

Le diagramme à l'ordre le plus bas est :



L'élément de matrice de la réaction  $q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow \gamma^*(q)$  est :

$$\mathcal{M}_0 = -iee_q\mu^\varepsilon \bar{v}(p_2)_j \gamma_\nu u(p_1)_j \epsilon^\nu. \quad (9.3.125)$$

Son carré, sommé/moyenné sur les polarisations et les couleurs est donc :

$$\overline{\Sigma} |\mathcal{M}_0|^2 = (ee_q\mu^\varepsilon)^2 < \frac{1}{3} > (1 - \varepsilon) \hat{s}. \quad (9.3.126)$$

L'intégrale sur l'espace de phase de la particule finale de masse carrée  $Q^2$  est en  $n$ -dimensions :

$$\begin{aligned} PS_0 &= \int \frac{d^{n-1}q}{(2\pi)^{n-1}2q^0} (2\pi)^n \delta^{(n)}(p_1 + p_2 - q) \\ &= \frac{2\pi}{\hat{s}} \delta(1 - z) \end{aligned} \quad (9.3.127)$$

où on a défini la variable sans dimension :

$$\boxed{z = \frac{Q^2}{\hat{s}}, \text{ avec } q^2 = Q^2 > 0.} \quad (9.3.128)$$

La section efficace partonique à l'approximation de Born est donc :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0^{q\bar{q}} &= \frac{1}{2\hat{s}} P S_0 \bar{\Sigma} |\mathcal{M}_0|^2 \\ &= \frac{\pi z}{Q^2} < \frac{1}{3} > (1 - \varepsilon) (e e_q \mu^\varepsilon)^2 \delta(1 - z).\end{aligned}\quad (9.3.129)$$

On note la similarité de cette expression avec celle, éq. (9.2.61), de la diffusion inélastique profonde ce qui est naturel puisque ces processus sont reliés par croisement. Pour les mêmes raisons que dans l'inélastique on donne un nom au terme contenant l'échelle dure :

$$\boxed{\hat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) = \frac{\pi z}{Q^2} < \frac{1}{3} > (1 - \varepsilon) \mu^{2\varepsilon}.}$$
 (9.3.130)

Au niveau hadronique, introduisant seulement un type de quark de distribution  $q_0(x)$ , on doit convoluer la section partonique avec le produit des distributions  $q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2)$  :

$$\sigma_{Born}^{pp} = (e e_q)^2 \int dx_1 dx_2 \hat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) \delta(1 - z) \{q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2) + [1 \leftrightarrow 2]\} \quad (9.3.131)$$

La variable d'énergie partonique  $\hat{s}$  est donnée par  $\hat{s} = x_1 x_2 s$  de sorte que définissant :

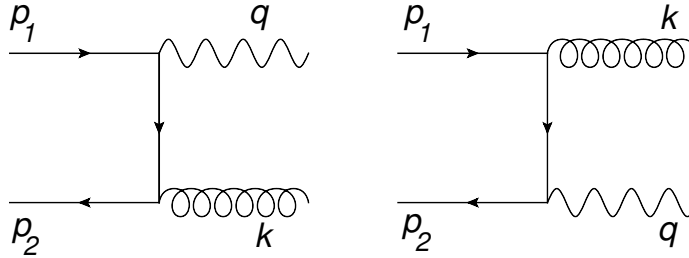
$$x = \frac{Q^2}{s} \quad \text{on a} \quad \frac{Q^2}{\hat{s}} = z = \frac{x}{x_1 x_2}, \quad (9.3.132)$$

et la section hadronique s'écrit alors :

$$\boxed{\sigma_{Born}^{pp}(Q^2, x, \varepsilon) = \hat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) (e e_q)^2 \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \delta\left(1 - \frac{x}{x_1 x_2}\right) \{q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2) + [1 \leftrightarrow 2]\}} \quad (9.3.133)$$

### 9.3.2 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contribution de *quark antiquark* $\rightarrow \gamma^*$ *gluon*

Les diagrammes d'annihilation de la paire  $q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow \gamma^*(q) + G(k)$  sont :



L'élément de matrice s'obtient très facilement à partir de celui du processus de création de paire traité dans une section précédente : il suffit de renverser le signe de toutes les impulsions et donc les invariants  $\hat{s}$ ,  $\hat{t}$ ,  $\hat{u}$  gardent la même signification. Quant à la somme/moyenne sur spin et couleur il faut multiplier l'éq. (9.2.87) par 8 (nombre de couleurs du gluon) et 2 (nombre de degrés de

polarisation du gluon) et diviser par 9 (couleur des quarks initiaux) et 4 (polarisation). On trouve finalement (cf éq. pour le cas  $Q^2 = 0$ ) :

$$\bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{q\bar{q}}^2 = (ee_q\mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 < \frac{1}{3} c_F > 2(1-\varepsilon) \left[ (1-\varepsilon) \left( \frac{\hat{t}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{t}} \right) + 2 \frac{\hat{s} q^2}{\hat{u} \hat{t}} - 2\varepsilon \right], \quad (9.3.134)$$

avec  $c_F = 4/3$ .

### • Intégrale sur l'espace de phase

On se place dans le repère du centre de masse des partons initiaux où les cordonnées sont :

$$p_1 = (\sqrt{\hat{s}/2}, 0, \dots, \sqrt{\hat{s}/2}) ; \quad p_2 = (\sqrt{\hat{s}/2}, 0, \dots, -\sqrt{\hat{s}/2}) ; \quad k = (k, \dots, k \cos \theta_1). \quad (9.3.135)$$

Pour évaluer l'intégrale sur les impulsions finales on suit la même procédure que celle des éqs. (9.2.73) la seule différence étant que maintenant l'une des particules finales, le photon, est massive :

$$\begin{aligned} PS &= \int \frac{d^{n-1}k}{(2\pi)^{n-1} 2k} \frac{d^{n-1}q}{(2\pi)^{n-1} 2q^0} (2\pi)^n \delta^{(n)}(p_1 + p_2 - q - k) \\ &= (2\pi)^{2-n} \int \frac{d^{n-1}k}{2k} \delta^+((p_1 + p_2 - k)^2 - Q^2) \\ &= \frac{(2\pi)^{2-n}}{4\sqrt{\hat{s}}} \left( \frac{\hat{s} - Q^2}{2\sqrt{\hat{s}}} \right)^{n-3} \int d\Omega_{n-2}. \end{aligned} \quad (9.3.136)$$

L'intégrale angulaire se fait comme en éq. (9.2.75) pour trouver, définissant comme auparavant  $\cos \theta_1 = 2y - 1$ ,

$$PS = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{4\pi}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{z^\varepsilon (1-z)^{1-2\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dy y^{-\varepsilon} (1-y)^{-\varepsilon}, \quad (9.3.137)$$

En terme des variables sans dimension les invariants sont :

$$\hat{s} = \frac{Q^2}{z} ; \quad (p_1 - k)^2 = \hat{t} = -\frac{Q^2}{z} (1-y)(1-z) ; \quad (p_2 - k)^2 = \hat{u} = -\frac{Q^2}{z} (1-z)y \quad (9.3.138)$$

de sorte que le carré de l'élément de matrice s'écrit :

$$\bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{q\bar{q}}^2 = (ee_q\mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 < \frac{1}{3} c_F > 2(1-\varepsilon) \left[ (1-\varepsilon) \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} - 2 \right) + \frac{z}{(1-z)^2} \frac{2}{y(1-y)} - 2\varepsilon \right]. \quad (9.3.139)$$

### • Divergences colinéaire et infrarouge

Combinant alors élément de matrice et espace de phase on construit la section efficace au niveau partonique pour trouver après intégration angulaire :

$$\begin{aligned} PS \bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{q\bar{q}}^2 &= \frac{1}{8\pi} \left( \frac{4\pi}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{z^\varepsilon (1-z)^{1-2\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dy y^{-\varepsilon} (1-y)^{-\varepsilon} \bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{q\bar{q}}^2 \\ &= \left[ (1-\varepsilon) (ee_q\mu^\varepsilon)^2 < \frac{1}{3} > \right] < c_F > \frac{g^2}{8\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left( -\frac{4}{\varepsilon} \right) \\ &\quad \left\{ 2 \frac{z^{1+\varepsilon}}{(1-z)^{1+2\varepsilon}} + z^\varepsilon (1-z)^{1-2\varepsilon} \right\} \end{aligned}$$

Le pôle en  $\varepsilon$  résulte de la divergence colinéaire  $y = 1 \Leftrightarrow \cos\theta_1 = 1$  quand le gluon est émis parallèlement au quark initial ou  $y = 0 \Leftrightarrow \cos\theta_1 = -1$  quand le gluon est parallèle à l'antiquark. On remarque, d'autre part, que le premier terme entre accolades a une singularité qui serait non intégrable à  $z = 1$  en 4 dimensions. Cela correspond à  $\hat{s} = Q^2$  : dans ce cas l'énergie du gluon final est nécessairement nulle (seuil de production du photon virtuel par la paire  $q\bar{q}$ ) et cela engendre une singularité infrarouge lors de l'intégration sur l'impulsion des quark et antiquark de l'état initial dans la construction de la section efficace hadronique. De façon similaire à l'éq. (9.2.98) on écrit pour un terme singulier en  $z = 1$  :

$$z^\varepsilon(1-z)^{-1-2\varepsilon}F(z) = F(z) \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon} \delta(1-z) + \frac{1}{(1-z)_+} + \varepsilon \frac{\ln z}{1-z} - 2\varepsilon \left( \frac{\ln(1-z)}{(1-z)_+} \right) \right\}, \quad (9.3.140)$$

où ici  $F(z) = 2z$ . La différence entre ce résultat et celui de l'éq. (9.2.98) provient du facteur d'espace de phase qui reflète une cinématique différente : pour le voir il suffit de comparer les facteurs  $PS$  des éqs. (9.2.76) et (9.3.137). Pour le deuxième terme entre accolades qui est régulier, il suffit pour le calculer de faire le développement en  $\varepsilon$

$$z^\varepsilon(1-z)^{1-2\varepsilon} = (1-z)(1 + \varepsilon \ln z - 2\varepsilon \ln(1-z)). \quad (9.3.141)$$

Finalement la contribution du processus d'annihilation à la section efficace partonique est donc

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\sigma}_1^{q\bar{q}}(Q^2, z, \varepsilon) &= \frac{1}{2\hat{s}} PS \bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{q\bar{q}}^2 \\ &= (ee_q)^2 \hat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} F_{q\bar{q}}(z, \varepsilon) \end{aligned}} \quad (9.3.142)$$

avec

$$F_{q\bar{q}}(z, \varepsilon) = \langle c_F \rangle 2 \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \delta(1-z) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + 2(1+z^2) \left( \frac{\ln(1-z)}{1-z} \right)_+ - (1+z^2) \frac{\ln z}{1-z} \right] \quad (9.3.143)$$

### 9.3.3 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contribution de quark gluon $\rightarrow \gamma^*$ quark

L'élément de matrice pour le processus  $q(p_1) + g(k) \rightarrow q(p_2) + \gamma^*(q)$  s'obtient de la réaction précédente par croisement :

$$\hat{s} \rightarrow \hat{t}; \quad \hat{t} \rightarrow \hat{s}; \quad \hat{u} \rightarrow \hat{u} \quad (9.3.144)$$

et on trouve (ne pas oublier le facteur -1 pour le croisement de la ligne fermionique) :

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{qG}^2 &= (1-\varepsilon) (ee_q\mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 \langle \frac{1}{6} \rangle 2 \left[ (1-\varepsilon) \left( -\frac{\hat{s}}{\hat{u}} - \frac{\hat{u}}{\hat{s}} \right) - 2 \frac{\hat{t}q^2}{\hat{u}\hat{s}} + 2\varepsilon \right] \\ &= (1-\varepsilon) (ee_q\mu^\varepsilon)^2 (g\mu^\varepsilon)^2 \langle \frac{1}{6} \rangle 2 \left[ (1-\varepsilon) \left( \frac{1}{y(1-z)} + y(1-z) \right) - 2 \frac{1-y}{y} z + 2\varepsilon \right], \end{aligned} \quad (9.3.145)$$

après prise en compte de la moyenne sur les couleurs et polarisations et utilisation la définition des invariants éq. (9.3.138). Comme d'habitude on construit la section efficace partonique et après

intégration sur la variable angulaire on trouve :

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_1^{qG}(Q^2, z, \varepsilon) &= \frac{1}{2\hat{s}} PS \bar{\Sigma} |\mathcal{M}|_{qG}^2 \\ &= \left[ (1-\varepsilon)(ee_q\mu^\varepsilon)^2 < \frac{1}{3} > \frac{\pi}{\hat{s}} \right] < \frac{1}{2} > \frac{g^2}{8\pi^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} z^\varepsilon (1-z)^{-2\varepsilon} \\ &\quad \left( -\frac{1}{\varepsilon}(z^2 + (1-z)^2 + z + \frac{3}{2}(1-z^2)) \right)\end{aligned}\tag{9.3.146}$$

que l'on peut ré-écrire :

$$\boxed{\widehat{\sigma}_1^{qG}(Q^2, z, \varepsilon) = (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} F_{qG}(z, \varepsilon)}\tag{9.3.147}$$

avec

$$F_{qG}(z, \varepsilon) = < \frac{1}{2} > \left[ -\frac{1}{\varepsilon}(z^2 + (1-z)^2) + (z^2 + (1-z)^2) \ln \frac{(1-z)^2}{z} + z + \frac{3}{2}(1-z^2) \right]\tag{9.3.148}$$

Ces deux dernières équations sont aussi valables pour  $\widehat{\sigma}_1^{\bar{q}G}(Q^2, z, \varepsilon)$ .

### 9.3.4 Corrections d'ordre $\alpha_s$ : contributions des termes virtuels

Elles sont très faciles à obtenir à partir des termes équivalents de la diffusion profondément inélastique. C'est simplement un facteur multiplicatif à l'amplitude de Born (9.3.125). Sans refaire le calcul, la correction de la boucle au vertex s'écrit de façon similaire à (9.2.108), avec comme résultat :

$$\mathcal{M}_{(1)} = \mathcal{M}_{(0)} < c_F > \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2 + i\epsilon} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)(\Gamma(1-\varepsilon))^2}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 8 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\}.\tag{9.3.149}$$

Mais  $-q^2 = -Q^2$  est maintenant négatif et il faut faire une petite manipulation pour simplifier le facteur  $(\dots)^\varepsilon$ . On a :

$$\begin{aligned}\left( \frac{4\pi\mu^2}{-Q^2 - i\epsilon} \right)^\varepsilon &= (4\pi)^\varepsilon e^{\varepsilon \ln(-Q^2/\mu^2 - i\epsilon)} \\ &= (4\pi)^\varepsilon e^{\varepsilon(\ln(Q^2/\mu^2) - i\pi)} = \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon e^{-i\pi\varepsilon} \\ &= \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \left( 1 - i\pi\varepsilon - \frac{\pi^2}{2}\varepsilon^2 \right),\end{aligned}\tag{9.3.150}$$

où on a utilisé le fait que la prescription  $-i\epsilon$  impose une partie imaginaire  $-i\pi$  au logarithme d'argument négatif. D'où (en jauge de Landau) :

$$\mathcal{M}_{(1)} = \mathcal{M}_{(0)} \frac{\alpha_s}{4\pi} < c_F > \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 8 + 2\frac{\pi^2}{3} \right\},\tag{9.3.151}$$



expression dans laquelle on a utilisé la relation (9.2.111). On a omis dans cette équation une partie imaginaire car ce qui est recherché est deux fois la partie réelle de l'interférence de la boucle avec le terme de Born ce qui apportera à la section efficace partonique la contribution :

$$\boxed{\widehat{\sigma}_{virtuel}^{q\bar{q}}(Q^2, z, \varepsilon) = (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, z, \varepsilon) \delta(1-z) \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} 2 V_1(\varepsilon)} \quad (9.3.152)$$

avec, par analogie avec l'inélastique profond, on a défini :

$$V_1(\varepsilon) = \langle c_F \rangle \frac{1}{2} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} - 8 + 2 \frac{\pi^2}{3} \right\}. \quad (9.3.153)$$

On remarque que les sections partoniques  $\widehat{\sigma}_1^{q\bar{q}}$ ,  $\widehat{\sigma}_{virtuel}^{q\bar{q}}$  and  $\widehat{\sigma}_1^{qG}$  ne dépendent que de  $z = Q^2/(sx_1x_2)$  et donc sont invariantes sous l'échange  $x_1 \rightarrow x_2$ . On a donc  $\widehat{\sigma}_{1,virtuel}^{q\bar{q}} = \widehat{\sigma}_{1,virtuel}^{\bar{q}q}$  et  $\widehat{\sigma}_1^{qG} = \widehat{\sigma}_1^{\bar{q}G}$ .

### 9.3.5 Diffusion Drell-Yan au premier ordre de QCD

La section efficace hadronique sera la somme des sections partoniques, "Born + virtuelle + annihilation + QCD Compton" convoluées avec le produit des distributions partoniques initiales :

$$\sigma^{pp} = \int dx_1 dx_2 \left\{ [q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2) (\widehat{\sigma}_0^{q\bar{q}} + \widehat{\sigma}_1^{q\bar{q}} + \widehat{\sigma}_{virtuel}^{q\bar{q}}) + (q_0(x_1) + \bar{q}_0(x_1)) G_0(x_2) \widehat{\sigma}_1^{qG}] + [1 \leftrightarrow 2] \right\}.$$

En détail on aura donc avec  $\sigma_0(Q^2, z, \varepsilon) = \sigma_0(Q^2, x, \varepsilon)/(x_1x_2)$  :

$$\begin{aligned} \sigma^{pp} = & (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \left\{ [q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2) \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \right. \\ & \cdot [q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2) (F_{q\bar{q}}(z, \varepsilon) + 2 V_1(\varepsilon) \delta(1-z)) + (q_0(x_1) + \bar{q}_0(x_1)) G_0(x_2) F_{qG}(z, \varepsilon)] + [1 \leftrightarrow 2] \left. \right\} \end{aligned}$$

On voit que les termes en  $1/\varepsilon^2$  se compensent entre la contribution virtuelle et  $F_{q\bar{q}}(z, \varepsilon)$  de l'éq. (9.3.143) et que les termes divergents restant sont proportionnels aux fonctions  $P_{qq}(z)$  et  $P_{qg}(z)$  donnés en éqs. (9.2.114) et (9.2.115). Quant aux termes finis on les note :

$$\boxed{f_{q\bar{q}}(z) = \langle c_F \rangle \left[ \left( \frac{2\pi^2}{3} - 8 \right) \delta(1-z) + 4(1+z^2) \left( \frac{\ln(1-z)}{1-z} \right)_+ - 2(1+z^2) \frac{\ln z}{1-z} \right]} \quad (9.3.154)$$

$$\boxed{f_{qG}(z) = \langle \frac{1}{2} \rangle \left[ (z^2 + (1-z)^2) \ln \frac{(1-z)^2}{z} + z + \frac{3}{2}(1-z^2) \right]} \quad (9.3.155)$$

de sorte que la section efficace hadronique devient :

$$\begin{aligned} \sigma^{pp} = & (ee_q)^2 \widehat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \left\{ \left[ q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2) \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \right. \right. \\ & \cdot \left( q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2) \left( -\frac{2}{\varepsilon} \right) P_{qq}(z) + (q_0(x_1) G_0(x_2) + G_0(x_1) \bar{q}_0(x_2)) \left( -\frac{1}{\varepsilon} \right) P_{qG}(z) \right) \\ & \left. \left. + \frac{\alpha_s}{2\pi} (q_0(x_1) \bar{q}_0(x_2) f_{q\bar{q}}(z) + (q_0(x_1) G_0(x_2) + G_0(x_1) \bar{q}_0(x_2)) f_{qG}(z)) \right] + [1 \leftrightarrow 2] \right\} \end{aligned}$$

où on a regroupé les termes divergents et pris la limite  $\varepsilon = 0$  dans les termes finis de la dernière ligne. On a également réarrangé les termes reliés par symétrie en faisant apparaître explicitement la combinaison  $(G_0(x_1)\bar{q}_0(x_2) + q_0(x_1)G_0(x_2))$ . Se concentrant maintenant sur le terme de Born et les facteurs qui ont un pôle en  $\varepsilon$  on les écrit, utilisant comme variables d'intégration, plutôt que  $x_1$  et  $x_2$ , soit  $x_1$  et  $z = x/x_1x_2$ , soit  $x_2$  et  $z$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_{div}^{pp} = & (ee_q)^2 \hat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) \left\{ \left[ \int \frac{dx_1}{x_1} q_0(x_1) \bar{q}_0\left(\frac{x}{x_1}\right) \right. \right. \\ & + \int \frac{dx_1}{x_1} q_0(x_1) \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \int \frac{dz}{z} \left(\bar{q}_0\left(\frac{x/x_1}{z}\right) P_{q\bar{q}}(z) + G_0\left(\frac{x/x_1}{z}\right) P_{qG}(z)\right) \\ & + \left. \int \frac{dx_2}{x_2} \bar{q}_0(x_2) \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \int \frac{dz}{z} \left(q_0\left(\frac{x/x_2}{z}\right) P_{q\bar{q}}(z) + G_0\left(\frac{x/x_2}{z}\right) P_{qG}(z)\right) \right] \\ & \left. + \left[ 1 \leftrightarrow 2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (9.3.156)$$

Les intégrales des deux premières lignes se combinent simplement en :

$$\int \frac{dx_1}{x_1} q_0(x_1) \bar{q}\left(\frac{x}{x_1}, Q^2\right) = \int \frac{dx_2}{x_2} \bar{q}(x_2, Q^2) q_0\left(\frac{x}{x_2}\right), \quad (9.3.157)$$

où on a introduit la distribution d'antiquark avec violation d'invariance d'échelle grâce à l'éq. (9.2.118). Substituant alors dans la troisième ligne  $\bar{q}(x_2, Q^2)$  à  $\bar{q}_0(x_2)$ , négligeant les termes d' $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  ainsi introduits, et combinant avec la deuxième forme de l'éq. (9.3.157) on voit que l'expression  $\sigma_{div}^{pp}$  se réduit à :

$$(ee_q)^2 \hat{\sigma}_0(Q^2, x, \varepsilon) \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \left\{ \left[ q(x_1, Q^2) \bar{q}(x_2, Q^2) \delta(1-z) \right] + \left[ 1 \leftrightarrow 2 \right] \right\}, \quad (9.3.158)$$

où toutes les singularités ont disparu. Le résultat de cette longue discussion est que la section efficace de production d'une paire de leptons dans les collisions proton-proton s'écrit relativement simplement comme :

$$\begin{aligned} \sigma^{pp}(Q^2, x) = & \frac{\pi x}{Q^2} \left\langle \frac{1}{3} \right\rangle (ee_q)^2 \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \left\{ \left[ q(x_1, Q^2) \bar{q}(x_2, Q^2) \delta(1-z) \right. \right. \\ & + \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \left[ q(x_1, Q^2) \bar{q}(x_2, Q^2) f_{q\bar{q}}(z) + (G(x_1, Q^2) \bar{q}(x_2, Q^2) + q(x_1, Q^2) G(x_2, Q^2)) f_{qG}(z) \right] \\ & \left. \left. + \left[ 1 \leftrightarrow 2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.3.159)$$

où la deuxième ligne est la correction, au premier ordre, à l'approximation des logarithmes dominants (LO) de la première. Le choix de l'échelle dans le couplage fort est arbitraire mais il est naturel de choisir  $Q^2$ . Dans les manipulations ci-dessus on a systématiquement ignoré tous les termes d'ordre  $\alpha_s^2$  et on a supposé que la distribution de gluon avait aussi une dépendance en

l'échelle caractéristique du processus considéré. On voit qu'on a donc bien absorbé les termes divergents du processus Drell-Yan dans la même redéfinition de la distribution de quarks que celle utilisée dans la diffusion inélastique profonde via l'éq. (9.2.118) : ceci est une démonstration, au premier ordre, du "théorème" général de factorisation qui affirme que, à tous les ordres de la théorie des perturbations, les singularités de masse sont absorbées par l'introduction des distributions partoniques violant l'invariance d'échelle et que la relation entre distributions nues et distributions violant l'invariance d'échelle sont indépendantes du processus dur considéré. La conséquence fondamentale en est que les distributions partoniques sont universelles : ce sont les mêmes quelque soit le processus de diffusion dur dans lesquelles elles apparaissent. Elles sont universelles mais leur forme explicite dépend cependant du choix de schéma de factorisation. En effet, pour un choix de schéma de factorisation défini comme en eq. (9.2.121) et d'échelle de factorisation arbitraire  $M^2 \neq Q^2$ , on montre facilement que la section efficace est obtenue à partir de la formule ci-dessus où on substitue  $M^2$  à  $Q^2$  et :

$$\begin{aligned} f_{q\bar{q}}(z) &\rightarrow f_{q\bar{q}}(z) + 2P_{qq}(z) \ln \frac{Q^2}{M^2} - 2c_q(z) \\ f_{qG}(z) &\rightarrow f_{qG}(z) + P_{qG}(z) \ln \frac{Q^2}{M^2} - c_G(z). \end{aligned} \quad (9.3.160)$$

Les fonctions de structure ainsi définies satisferont aux mêmes équations d'évolution mais les conditions initiales à  $Q_0^2$  seront différentes.

A l'approximation des logarithmes dominants où on néglige les termes d'ordre  $\alpha_s$  on a l'expression très simple :

$$\sigma^{pp}(Q^2, x) = (ee_q)^2 < \frac{1}{3} > \frac{\pi}{s} \int \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \left\{ q(x_1, M^2) \bar{q}(x_2, M^2) \delta\left(1 - \frac{x}{x_1 x_2}\right) + [1 \leftrightarrow 2] \right\} \quad (9.3.161)$$

mais on perd en pouvoir prédictif car si on varie l'échelle de factorisation arbitraire  $M$  la section efficace calculée varie de façon monotone car on n'a plus le mécanisme de compensation entre les termes d'ordre  $\alpha_s \ln(Q^2/M^2)$  et la variation des distributions partoniques induite par les équations DGLAP.

