

Compléments sur les matrices de Dirac et le tenseur de Levi-Civita

1 Symbole et tenseur de Levi-Civita

Le symbole de Levi-Civita avec n indices :

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

est un nombre tel que :

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3, \dots, n) \\ -1 & \text{si } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, 3, \dots, n) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Notamment, si deux indices sont égaux alors le symbole de Levi-Civita est nul.

1.1 Lien entre le symbole de Levi-Civita et les déterminants

Le symbole de Levi-Civita est intimement lié aux déterminants. Commençons par le cas d'une matrice 2×2 , le déterminant est donné par :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij} a_{1i} a_{2j}$$

où le symbole ε_{ij} est anti-symétrique sur i et j ($\varepsilon_{ii} = 0$) et $\varepsilon_{12} = 1$. On voit donc que le déterminant peut s'écrire à l'aide du symbole de Levi-Civita.

Pour une matrice A $n \times n$, par définition, le déterminant est donné par :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in G_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \quad (1)$$

où G_n est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ . Cette définition peut encore se réécrire sous la forme :

$$\det(A) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \varepsilon_{i_1, \dots, i_n} \prod_{k=1}^n a_{k i_k} \quad (2)$$

où le symbole de Levi-Civita $\varepsilon_{i_1, \dots, i_n}$ qui est anti-symétrique sous une permutation de deux indices adjacents joue le rôle de la signature de la permutation. On voit donc bien le lien entre le symbole de Levi-Civita à n indices et le déterminant d'une matrice $n \times n$

1.2 Symbole de Levi-Civita à trois indices

Nous avons vu apparaître le symbole de Levi-Civita à trois indices comme constante de structure du groupe $SU(2)$, étudions le plus en détail.

Par définition du symbole de Kronecker, nous avons que :

$$\sum_{a,b,c} \varepsilon_{abc} \delta_{ia} \delta_{jb} \delta_{kc} = \varepsilon_{ijk} \quad (3)$$

Mais cette équation implique que le symbole de Levi-Civita peut s'écrire comme le déterminant d'une matrice dont les éléments sont des symboles de Kronecker, à savoir :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \quad (4)$$

La matrice dont le déterminant est égal à ε_{ijk} est la matrice unité dans laquelle des lignes et des colonnes ont été permutées.

Cette relation (4) nous permet de calculer des produits de symboles de Levi-Civita contractés sur certains indices. Par exemple, pour calculer le produit suivant $\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn}$, nous allons utiliser l'équation (4) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} &= \sum_{i=1}^3 \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^3 \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{m1} & \delta_{n1} \\ \delta_{i2} & \delta_{m2} & \delta_{n2} \\ \delta_{i3} & \delta_{m3} & \delta_{n3} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^3 \left| \begin{pmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{i1} & \delta_{m1} & \delta_{n1} \\ \delta_{i2} & \delta_{m2} & \delta_{n2} \\ \delta_{i3} & \delta_{m3} & \delta_{n3} \end{pmatrix} \right| \\ &= \sum_{i=1}^3 \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

où nous avons utilisé que le déterminant d'une matrice est égale au déterminant de sa transposée et que le déterminant d'un produit de matrices est égale au produit des déterminants.

Si on calcule le déterminant, nous trouvons que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} &= (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{km} \delta_{jn}) \sum_{i=1}^3 (\delta_{ii} - 2) \\ &= \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{km} \delta_{jn} \end{aligned} \quad (6)$$

1.3 Tenseur de Levi-Civita

Dans l'espace de Minkowski, nous pouvons définir un tenseur contravariant de rang quatre $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ dont les composantes sont le symbole de Levi-Civita à quatre indices. Il faut faire attention à la position des indices, on utilise le tenseur métrique pour monter et descendre les indices. On peut donc définir :

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} g_{\gamma\rho} g_{\delta\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (7)$$

Comme les indices du tenseur de Levi-Civita doivent être différents et que le tenseur métrique est diagonal, le produit des tenseurs métriques du membre de droite de l'équation (7) sera égale à $g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} = -1$. Par définition, nous avons que $\varepsilon^{0123} = 1$ (donc $\varepsilon_{0123} = -1$).

Comme pour le symbole de Levi-Civita à trois indices, nous pouvons définir le tenseur de Levi-Civita à partir d'un déterminant :

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{vmatrix} g_0^\mu & g_1^\mu & g_2^\mu & g_3^\mu \\ g_0^\nu & g_1^\nu & g_2^\nu & g_3^\nu \\ g_0^\rho & g_1^\rho & g_2^\rho & g_3^\rho \\ g_0^\sigma & g_1^\sigma & g_2^\sigma & g_3^\sigma \end{vmatrix} \quad (8)$$

Nous pouvons utiliser cette définition (eq. (8)) pour calculer la contraction sur plusieurs indices d'un produit de tenseur de Levi-Civita. Prenons l'exemple suivant : $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}$, nous pouvons procéder de la même manière que dans la section précédente, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} &= -\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\beta\sigma\tau} \\ &= - \begin{vmatrix} g_0^\alpha & g_1^\alpha & g_2^\alpha & g_3^\alpha \\ g_0^\beta & g_1^\beta & g_2^\beta & g_3^\beta \\ g_0^\mu & g_1^\mu & g_2^\mu & g_3^\mu \\ g_0^\nu & g_1^\nu & g_2^\nu & g_3^\nu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_\alpha^0 & g_\beta^0 & g_\sigma^0 & g_\tau^0 \\ g_\alpha^1 & g_\beta^1 & g_\sigma^1 & g_\tau^1 \\ g_\alpha^2 & g_\beta^2 & g_\sigma^2 & g_\tau^2 \\ g_\alpha^3 & g_\beta^3 & g_\sigma^3 & g_\tau^3 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} g_\alpha^\alpha & g_\beta^\alpha & g_\sigma^\alpha & g_\tau^\alpha \\ g_\alpha^\beta & g_\beta^\beta & g_\sigma^\beta & g_\tau^\beta \\ g_\alpha^\mu & g_\beta^\mu & g_\sigma^\mu & g_\tau^\mu \\ g_\alpha^\nu & g_\beta^\nu & g_\sigma^\nu & g_\tau^\nu \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

Le calcul du déterminant est un peu long mais sans difficulté, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} &= -(g_\sigma^\mu g_\tau^\nu - g_\sigma^\nu g_\tau^\mu) (g_\alpha^\alpha g_\beta^\beta - 3 g_\alpha^\alpha - 2 g_\beta^\beta + 6) \\ &= -2 (g_\sigma^\mu g_\tau^\nu - g_\sigma^\nu g_\tau^\mu) \end{aligned} \quad (10)$$

De même, en utilisant une technique similaire, nous pouvons montrer que :

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\tau} = -6 g_\tau^\nu \quad (11)$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24 \quad (12)$$

2 Compléments sur les matrices γ

Quelque soit leur représentation, les matrices γ ont les propriétés suivantes :

$$(\gamma^0)^2 = 1 \quad (13)$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (14)$$

$$(\gamma^i)^2 = -1 \quad (15)$$

$$(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad (16)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu} \quad (17)$$

De plus, on définit une nouvelle matrice, γ^5 , par :

$$\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma_5 \quad (18)$$

qui a les propriétés suivantes :

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (19)$$

$$(\gamma^5)^2 = 1 \quad (20)$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad (21)$$

La propriété (19) est évidente car l'indice μ sera égale à l'un des quatre indices 0,1,2,3 donc lorsque l'on voudra passer la matrice γ^μ à travers γ^5 , on va anti-commuter trois fois (avec les indices différents de μ) et commuter une fois (avec l'indice égale à μ). Les propriétés (20) et (21) découlent des équations (13-16).

2.1 Quelques résultats sur les traces de matrices γ

1) Une trace est cyclique.

$$\begin{aligned} Tr \left[\gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_n} \right] &= Tr \left[\gamma^{\alpha_n} \gamma^{\alpha_1} \dots \gamma^{\alpha_{n-1}} \right] \\ &= Tr \left[\gamma^{\alpha_{n-1}} \gamma^{\alpha_n} \dots \gamma^{\alpha_{n-2}} \right] \\ &= \dots \end{aligned} \quad (22)$$

Ceci est une propriété générale des traces de matrices.

2) Si une trace contient un produit impair de matrices γ alors elle est nulle.

$$Tr \left[\gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_n} \right] = 0 \quad \text{si } n = 2m + 1 \quad (23)$$

Pour montrer cela, posons $T = Tr \left[\gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_n} \right]$ et introduisons au début de la trace 1 sous la forme de $(\gamma^5)^2$

$$T = Tr \left[\gamma^5 \gamma^5 \gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_n} \right] \quad (24)$$

puis nous faisons anti-commuter la deuxième matrice γ^5 jusqu'à la placer à la fin de la trace

$$T = (-1)^n Tr \left[\gamma^5 \gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_n} \gamma^5 \right] \quad (25)$$

ensuite en utilisant la propriété de cyclicité de la trace pour ramener les deux matrices γ^5 côte à côte et l'éq. (20), nous aboutissons au résultat suivant :

$$Tr \left[\gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_n} \right] = (-1)^n Tr \left[\gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_n} \right] \quad (26)$$

Donc pour n impair, nous avons bien le résultat escompté de l'éq. (23).

3) Pour un nombre pair de matrice γ :

$$Tr \left[\gamma^\alpha \gamma^\beta \right] = 4 g^{\alpha\beta} \quad (27)$$

$$Tr \left[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \right] = 4 (g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}) \quad (28)$$

Pour prouver ces résultats, il faut utiliser l'éq. (17) pour passer, à l'intérieur de la trace, la matrice la plus à gauche complètement à droite et utiliser la propriété de cyclicité de la trace

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des quadri-vecteurs :

$$Tr \left[\mathbb{A}_1 \mathbb{A}_2 \right] = 4 A_1 \cdot A_2 \quad (29)$$

$$Tr \left[\mathbb{A}_1 \mathbb{A}_2 \mathbb{A}_3 \mathbb{A}_4 \right] = 4 (A_1 \cdot A_2 A_3 \cdot A_4 + A_1 \cdot A_4 A_2 \cdot A_3 - A_1 \cdot A_3 A_2 \cdot A_4) \quad (30)$$

$$Tr \left[\mathbb{A}_1 \mathbb{A}_2 \dots \mathbb{A}_{2n} \right] = A_1 \cdot A_2 Tr \left[\mathbb{A}_3 \mathbb{A}_4 \dots \mathbb{A}_{2n} \right] - A_1 \cdot A_3 Tr \left[\mathbb{A}_2 \mathbb{A}_4 \dots \mathbb{A}_{2n} \right] \\ + \dots + A_1 \cdot A_{2n} Tr \left[\mathbb{A}_2 \mathbb{A}_3 \dots \mathbb{A}_{2n-1} \right] \quad (31)$$

4) La trace de chaine de matrice γ est réversible.

$$Tr \left[\gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_{2n-1}} \gamma^{\alpha_{2n}} \right] = Tr \left[\gamma^{\alpha_{2n}} \gamma^{\alpha_{2n-1}} \dots \gamma^{\alpha_2} \gamma^{\alpha_1} \right] \quad (32)$$

Cette propriété se montre en se rappelant que, quelque soit une matrice B, $Tr[B] = Tr[B^t]$ où B^t est la matrice transposée, donc :

$$Tr \left[\gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_{2n-1}} \gamma^{\alpha_{2n}} \right] = Tr \left[(\gamma^{\alpha_{2n}})^t (\gamma^{\alpha_{2n-1}})^t \dots (\gamma^{\alpha_2})^t (\gamma^{\alpha_1})^t \right] \quad (33)$$

Mais, quelque soit la représentation des matrices γ , il existe une matrice unitaire C telle que :

$$(\gamma^\mu)^t = -C^{-1} \gamma^\mu C \quad (34)$$

en utilisant cela, nous avons finalement que :

$$Tr \left[\gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_{2n-1}} \gamma^{\alpha_{2n}} \right] = (-1)^n Tr \left[\gamma^{\alpha_{2n}} \gamma^{\alpha_{2n-1}} \dots \gamma^{\alpha_2} \gamma^{\alpha_1} \right] \quad (35)$$

Pour n pair, nous obtenons bien le résultat voulu, pour n impair, l'égalité reste vrai mais n'apporte pas grand chose.

5) Chaines de matrices γ sandwichées entre deux matrices γ contractées

$$\gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_\mu = -2\gamma_\alpha \quad (36)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu = 4g_{\alpha\beta} \quad (37)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta \gamma_\mu = -2\gamma_\delta \gamma_\beta \gamma_\alpha \quad (38)$$

Pour montrer ces relations, il suffit de faire anti-commuter la dernière matrice γ_μ à travers la chaine de matrice γ pour la ramener à coté de la matrice γ^μ et d'utiliser que :

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = \gamma^0 \gamma_0 + \gamma^1 \gamma_1 + \gamma^2 \gamma_2 + \gamma^3 \gamma_3 \\ = (\gamma^0)^2 - (\gamma^1)^2 - (\gamma^2)^2 - (\gamma^3)^2 \\ = 4$$

6) Les Traces de chaine de matrices γ contenant une matrice γ^5

La plus simple est $Tr [\gamma^5]$. En utilisant le résultat (28), nous avons que :

$$Tr [\gamma^5] = i Tr [\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3] = 4 (g^{01} g^{23} + g^{03} g^{12} - g^{02} g^{13})$$

mais le tenseur métrique est diagonale et il apparaît aucun élément diagonal dans le membre de droite, donc :

$$Tr [\gamma^5] = 0 \quad (39)$$

Il est facile de monter que :

$$Tr [\gamma^5 \gamma^\mu] = i Tr [\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^\mu] = 0 \quad (40)$$

car une trace d'un nombre impaire de matrice γ est nulle. Pour les même raison, nous avons que :

$$Tr [\gamma^5 \gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_n}] = 0 \quad (41)$$

si $n = 2p + 1$.

De plus, nous pouvons montrer que :

$$Tr [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu] = 0 \quad (42)$$

En effet, nous pouvons insérer un produit de matrice γ^α avec α différent de μ et ν .

$$\begin{aligned} Tr [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu] &= s Tr [\gamma^\alpha \gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= s Tr [\gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha] \\ &= -s Tr [\gamma^\alpha \gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= -Tr [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu] \end{aligned}$$

où $s = (\gamma^\alpha)^2$.

La trace de quatre matrices γ fois γ^5 est utile lorsque l'on prend le module carré d'un élément de matrice dans le Modèle Standard. Il est aisé de se convaincre que :

$$Tr [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] \propto \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

En effet, si les quatre indices μ, ν, ρ , et σ sont différents, une permutation de deux matrices adjacentes induira un signe moins ce qui implique que $Tr [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma]$ est complètement anti-symétrique et est donc proportionnel au tenseur de Levi-Civita. Si deux indices sont égaux, alors après d'éventuelles anti-commutations pour amener les deux matrices identiques côte-à-côte, nous aurons la trace de deux matrices γ fois γ^5 qui est nulle comme l'est le tenseur de Levi-Civita si deux indices sont égaux. De même si plus de deux indices sont identiques. Pour fixer le coefficient de proportionnalité, nous prendrons $\mu = 0, \nu = 1, \rho = 2$ et $\sigma = 3$, dans ce cas nous avons à calculer :

$$\begin{aligned} Tr [\gamma^5 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3] &= i Tr [\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3] \\ &= i Tr [(\gamma^0)^2 (\gamma^1)^2 (\gamma^2)^2 (\gamma^3)^2] \\ &= -4i \end{aligned} \quad (43)$$

nous avons donc :

$$Tr [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = -4i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (44)$$

ou encore :

$$Tr [\gamma^5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma] = -4i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (45)$$

7) Chaines de matrices γ sandwichées entre deux spineurs

Lorsque l'on calcule le module carré d'un l'élément de matrice, nous avons à calculer :

$$T = (\bar{u}(p) \Gamma u(k))^\dagger \quad (46)$$

où Γ est une chaine de matrice γ . En utilisant la définition de $\bar{u}(p)$, nous avons :

$$\begin{aligned} T &= u^\dagger(k) \Gamma^\dagger \gamma^0 u(p) \\ &= \bar{u}(k) \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 u(p) \end{aligned} \quad (47)$$

Si Γ ne contient pas de matrice γ^5 , c'est à dire $\Gamma = \gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_n}$, son conjugué Hermitien est donné par :

$$\begin{aligned} \Gamma^\dagger &= \gamma^{\alpha_n \dagger} \dots \gamma^{\alpha_2 \dagger} \gamma^{\alpha_1 \dagger} \\ &= \gamma^0 \gamma^{\alpha_n} \dots \gamma^{\alpha_2} \gamma^{\alpha_1} \gamma^0 \end{aligned} \quad (48)$$

d'où :

$$\gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 = \gamma^{\alpha_n} \dots \gamma^{\alpha_2} \gamma^{\alpha_1} = \Gamma^R \quad (49)$$

où Γ^R est la chaine de matrices γ inversée.

Si Γ contient des matrices γ^5 , alors comme $(\gamma^5)^2 = 1$ et que $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$, si le nombre de matrices γ^5 est pair on peut les faire disparaître et s'il est impair, on peut toujours se ramener au cas suivant :

$$\Gamma = \gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_n} \gamma^5 = \Gamma' \gamma^5$$

Le conjugué Hermitien de Γ est donc $\Gamma^\dagger = \gamma^5 \Gamma'^\dagger$ car la matrice γ^5 est Hermitienne, et donc :

$$\gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \gamma^0 \Gamma'^\dagger \gamma^0 = -\gamma^5 \Gamma'^R \quad (50)$$

En particulier,

$$\begin{aligned} (\bar{u}(p) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(k))^\dagger &= (\bar{u}(p) \gamma^\mu u(k))^\dagger - (\bar{u}(p) \gamma^\mu \gamma^5 u(k))^\dagger \\ &= \bar{u}(k) \gamma^\mu u(p) + \bar{u}(k) \gamma^5 \gamma^\mu u(p) \\ &= \bar{u}(k) (1 + \gamma^5) \gamma^\mu u(p) \end{aligned} \quad (51)$$