

Exercices sur la QED

Ces exercices consistent en l'étude de trois réactions (à l'ordre le plus bas) importantes en QED :

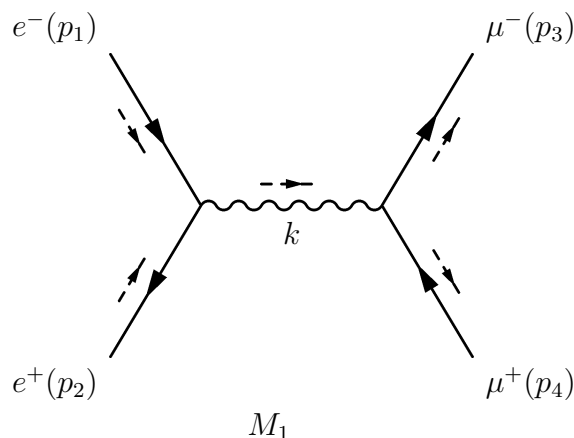
- l'annihilation électron positron en une paire muon anti-muon : $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$
- l'annihilation électron positron en une paire électron positron, encore appelée la diffusion Bhabha : $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$
- la diffusion électron photon, encore appelée la diffusion Compton : $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$

Il est conseillé au lecteur de lire le cours "Lagrangien QED, Règles de Feynman" avant de regarder ces exercices. Pour tout ce qui touche à la Diracologie (tout ce qui a à voir avec les propriétés des matrices γ de Dirac, nous renvoyons le lecteur au "Compléments sur les matrices de Dirac et le tenseur de Levi-Civita".

1 Réaction $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$

Le muon μ est un électron plus massif : $m_\mu \simeq 100$ MeV alors que $m_e \simeq 0.5$ MeV. Le muon n'est pas stable : $\tau \simeq 10^{-6}$ s mais comparé à l'échelle de temps des interactions électromagnétiques, il peut être considéré comme stable.

Une seule amplitude contribue :



Les flèches principales (sur les lignes continues) indiquent le sens de l'écoulement du flot fermionique, les flèches secondaires (sur les lignes traitillées) indiquent le sens du flot de quadri-impulsion. A chaque vertex, nous devons avoir la conservation de ce flot, ainsi que la conservation de l'énergie-impulsion et des différentes charges (électrique dans notre cas). Pour le vertex

à gauche, la conservation de l'énergie-impulsion implique : $p_1 + p_2 = k$ alors que pour le vertex de droite $k = p_3 + p_4$. L'orientation du flot de quadri-impulsion est fixée pour les particules externes : les particules de l'état initial sont rentrantes alors que celles de l'état final sont sortantes. Pour la ligne photonique interne, comme le propagateur du photon ne dépend que du carré de la quadri-impulsion du photon, l'orientation du flot de quadri-impulsion de cette ligne est arbitraire. Notons que nous n'avons pas de vertex $e \mu \gamma$ car la réaction $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$ n'existe pas dans la nature, on parle de conservation du nombre leptonique : le muon et l'électron sont des leptons (particules n'interagissant pas fortement) de première et deuxième génération et l'interaction électromagnétique ne couple pas les leptons de générations différentes. C'est un fait expérimental, la théorie doit s'en accommoder !

La section efficace différentielle est la probabilité de transition dans l'état final $\mu^+ \mu^-$ avec des impulsions comprises entre $(\vec{p}_3, \vec{p}_3 + d\vec{p}_3$ et $\vec{p}_4, \vec{p}_4 + d\vec{p}_4)$ pour une diffusion normalisée par le flux incident.

$$d\sigma = \frac{1}{4 E_1 E_2 v_{rel}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2 E_3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2 E_4} |M_1|^2 \quad (1)$$

v_{rel} est la vitesse relative des particules incidentes. Cette formule est valable dans tous les repères où $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ sont collinéaires¹. Dans la définition de la section efficace (équ. (1)), le facteur de flux n'est pas explicitement un invariant sous les transformation de Lorentz mais nous pouvons montrer que :

$$E_1 E_2 v_{rel} = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \quad (2)$$

Pour prouver l'équation (2), il faut partir de la définition de la vitesse relative de la particule 1 par rapport à la particule 2 :

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

Comme nous utilisons un référentiel où $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ sont sur le même axe (mais n'ont pas forcément la même sens), le module de $\vec{v}_{rel}$ est donné par :

$$\begin{aligned} v_{rel} &= |s_1 v_1 - s_2 v_2| \\ &= |v_1 - s v_2| \\ &= \sqrt{(v_1 - s v_2)^2} \end{aligned}$$

où s_1 et s_2 sont ± 1 et $s = s_2/s_1$. Donc, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} E_1 E_2 v_{rel} &= \sqrt{E_1^2 E_2^2 (v_1 - s v_2)^2} \\ &= \sqrt{E_1^2 E_2^2 ((1 - s v_1 v_2)^2 - (1 - v_1^2)(1 - v_2^2))} \\ &= \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \end{aligned}$$

car $p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = E_1 E_2 (1 - s v_1 v_2)$ et $m_i^2 = E_i^2 - |\vec{p}_i|^2 = E_i^2 (1 - v_i^2)$ pour $i = 1, 2$

A partir des règles de Feynman de la QED, nous pouvons écrire l'amplitude M_1 :

$$M_1 = i e^2 \bar{v}_{l_2}(p_2) \gamma_\mu u_{l_1}(p_1) \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\lambda} \right) \frac{1}{k^2 + i\lambda} \bar{u}_{l_3}(p_3) \gamma_\nu v_{l_4}(p_4) \quad (3)$$

1. Cette formule est aussi vraie pour tout type de particules (fermions et bosons) à condition de normaliser correctement les spineurs de Dirac (c.f. équations (9) et (10))

avec $k = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$. Nous pouvons faire deux remarques.

- Le terme en $k^\mu k^\nu$ du propagateur du photon ne contribue pas. En effet, nous pouvons réécrire le terme :

$$\bar{v}_{l_2}(p_2) \gamma_\mu u_{l_1}(p_1) k^\mu k^\nu \bar{u}_{l_3}(p_3) \gamma_\nu v_{l_4}(p_4)$$

comme :

$$\bar{v}_{l_2}(p_2) (\not{p}_1 + \not{p}_2) u_{l_1}(p_1) \bar{u}_{l_3}(p_3) (\not{p}_3 + \not{p}_4) v_{l_4}(p_4)$$

puis en utilisant les équations de Dirac que vérifient les spineurs u et v :

$$(\not{p} - m) u_l(p) = 0 \quad \bar{u}_l(p) (\not{p} - m) = 0$$

et

$$(\not{p} + m) v_l(p) = 0 \quad \bar{v}_l(p) (\not{p} + m) = 0$$

nous pouvons montrer que ce terme est nul. Ceci ne traduit rien d'autre que la conservation du courant électromagnétique : $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ avec $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$.

- De plus, la partie imaginaire du propagateur du photon peut être enlevé (on peut prendre la limite $\lambda \rightarrow 0$) car k^2 est toujours positif : $(p_1 + p_2)^2 \geq 4 m_\mu^2$.

L'amplitude s'écrit donc :

$$M_1 = i e^2 \bar{v}_{l_2}(p_2) \gamma_\mu u_{l_1}(p_1) \frac{1}{k^2} \bar{u}_{l_3}(p_3) \gamma^\mu v_{l_4}(p_4) \quad (4)$$

La plupart des faisceaux de particules initiales ne sont pas polarisés et c'est rare lorsque l'on observe les hélicités des particules finales. La section efficace de la réaction $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ non polarisée s'exprime en terme de trace de produit de matrice γ . Nous devons sommer sur les polarisations finales et moyenner sur les polarisations initiales :

$$|\overline{M}_1|^2 = \frac{1}{4} \sum_{l_1=1}^2 \sum_{l_2=1}^2 \sum_{l_3=1}^2 \sum_{l_4=1}^2 |M_1|^2$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} |\overline{M}_1|^2 &= \frac{e^4}{4 k^4} \sum_{l_1=1}^2 \sum_{l_2=1}^2 \left[\bar{v}_{l_2}(p_2) \gamma_\mu u_{l_1}(p_1) \left(\bar{v}_{l_2}(p_2) \gamma_\nu u_{l_1}(p_1) \right)^\dagger \right] \\ &\quad \times \sum_{l_3=1}^2 \sum_{l_4=1}^2 \left[\bar{u}_{l_3}(p_3) \gamma^\mu v_{l_4}(p_4) \left(\bar{u}_{l_3}(p_3) \gamma^\nu v_{l_4}(p_4) \right)^\dagger \right] \end{aligned} \quad (5)$$

L'Hermitien conjugué du courant est égale à (c.f. "Compléments sur les matrices de Dirac et le tenseur de Levi-Civita") :

$$\left(\bar{v}_{l_2}(p_2) \gamma_\nu u_{l_1}(p_1) \right)^\dagger = \bar{u}_{l_1}(p_1) \gamma_\nu v_{l_2}(p_2)$$

Introduisons les indices spinoriels, c'est à dire écrivons nos produits de matrices en termes des éléments de ces matrices :

$$|\overline{M}_1|^2 = \frac{e^4}{4k^4} \sum_{l_1=1}^2 \sum_{l_2=1}^2 \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 \sum_{\alpha'=1}^4 \sum_{\beta'=1}^4 \left[\bar{v}_{l_2}^\alpha(p_2) \gamma_\mu^{\alpha\beta} u_{l_1}^\beta(p_1) \bar{u}_{l_1}^{\beta'}(p_1) \gamma_\nu^{\beta'\alpha'} v_{l_2}^{\alpha'}(p_2) \right] \quad (6)$$

$$\times \sum_{l_3=1}^2 \sum_{l_4=1}^2 \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\delta=1}^4 \sum_{\gamma'=1}^4 \sum_{\delta'=1}^4 \left[\bar{u}_{l_3}^{\gamma'}(p_3) \gamma^{\mu\gamma\delta} v_{l_4}^\delta(p_4) \bar{v}_{l_4}^{\delta'}(p_4) \gamma^{\nu\delta'\gamma'} u_{l_3}^{\gamma'}(p_3) \right]$$

Comme chaque terme est un scalaire nous pouvons les réordonner comme bon nous semble et réécrire l'équation (7) de la façon suivante :

$$|\overline{M}_1|^2 = \frac{e^4}{4k^4} \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 \sum_{\alpha'=1}^4 \sum_{\beta'=1}^4 \left[\sum_{l_2=1}^2 \left(v_{l_2}^{\alpha'}(p_2) \bar{v}_{l_2}^\alpha(p_2) \right) \gamma_\mu^{\alpha\beta} \sum_{l_1=1}^2 \left(u_{l_1}^\beta(p_1) \bar{u}_{l_1}^{\beta'}(p_1) \right) \gamma_\nu^{\beta'\alpha'} \right] \quad (7)$$

$$\times \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\delta=1}^4 \sum_{\gamma'=1}^4 \sum_{\delta'=1}^4 \left[\sum_{l_3=1}^2 \left(u_{l_3}^{\gamma'}(p_3) \bar{u}_{l_3}^{\gamma'}(p_3) \right) \gamma^{\mu\gamma\delta} \sum_{l_4=1}^2 \left(v_{l_4}^\delta(p_4) \bar{v}_{l_4}^{\delta'}(p_4) \right) \gamma^{\nu\delta'\gamma'} \right]$$

Si nous utilisons les projecteurs sur les états d'énergie :

$$\Lambda^\pm(p) = \frac{(\pm \not{p} + m)}{2m} \quad (8)$$

et si les spineurs de Dirac sont normalisés de la façon suivante :

$$\bar{u}_r(p) u_s(p) = 2m \delta_{rs} \quad (9)$$

$$\bar{v}_r(p) v_s(p) = -2m \delta_{rs} \quad (10)$$

nous pouvons alors montrer que :

$$\sum_{l=1}^2 u_l^\alpha(p) \bar{u}_l^\beta(p) = 2m \Lambda^{+\alpha\beta} \quad (11)$$

$$\sum_{l=1}^2 v_l^\alpha(p) \bar{v}_l^\beta(p) = -2m \Lambda^{-\alpha\beta} \quad (12)$$

D'où l'élément de matrice devient :

$$|\overline{M}_1|^2 = \frac{e^4}{4k^4} Tr \left[(\not{p}_2 - m_e) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\nu \right] Tr \left[(\not{p}_3 + m_\mu) \gamma^\mu (\not{p}_4 - m_\mu) \gamma^\nu \right] \quad (13)$$

A l'aide des formules sur les traces de matrices γ (c.f. "Compléments sur les matrices de Dirac et le tenseur de Levi-Civita"), nous pouvons exprimer le module carré de l'amplitude en terme de produit scalaire des 4-impulsions externes et nous trouvons :

$$|\overline{M}_1|^2 = \frac{8e^4}{k^4} \left\{ p_2 \cdot p_3 p_1 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_4 p_1 \cdot p_3 + m_e^2 p_3 \cdot p_4 + m_\mu^2 p_1 \cdot p_2 + 2m_e^2 m_\mu^2 \right\} \quad (14)$$

Nous allons maintenant faire l'intégration sur l'espace de phase. Nous choisissons comme observable $d\sigma/d\Omega_3$ où Ω_3 est l'élément d'angle solide du vecteur $\vec{p}_3$.

$$d\sigma = \frac{1}{4 \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_e^4}} \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3}{2 E_3} \frac{d^3 p_4}{2 E_4} |\overline{M}_1|^2 \quad (15)$$

Remarquons que :

$$\int \frac{d^3 p_4}{2 E_4} = \int d^4 p_4 \delta^+(p_4^2 - m_\mu^2) \quad (16)$$

avec $\delta^+(p_4^2 - m_\mu^2) = \delta(p_4^2 - m_\mu^2) \Theta(p_4^0)$. En intégrant le membre de droite de l'équation (16), nous retrouvons bien le membre de gauche de cette même équation.

En utilisant cette relation, nous pouvons intégrer sur $d^4 p_4$ avec la distribution δ qui exprime la conservation de l'énergie-impulsion. De plus, nous utilisons les coordonnées sphériques pour l'intégration sur le vecteur $\vec{p}_3$:

$$d^3 p_3 = |\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3| d\Omega_3 \quad (17)$$

La section efficace différentielle devient :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \frac{1}{4 \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_e^4}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{|\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3|}{2 E_3} \delta^+((p_1 + p_2 - p_3)^2 - m_\mu^2) |\overline{M}_1|^2 \quad (18)$$

Plaçons-nous dans le repère du centre de masse e^+e^- (le repère où $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$). Dans ce référentiel, nous choisissons d'orienter les tri-impulsions le long de l'axe OZ :

$$p_1 = (E_1, 0, 0, |\vec{p}_1|) \quad (19)$$

$$p_2 = (E_2, 0, 0, -|\vec{p}_1|) \quad (20)$$

Il est facile de montrer que dans ce repère, puisque l'électron et le positron ont la même masse, nous avons que $E_1 = E_2 = \sqrt{s}/2$ avec :

$$s = (p_1 + p_2)^2$$

A l'aide de la quantité suivante :

$$\rho_e = \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}} \quad (21)$$

nous pouvons réécrire nos quadri-vecteur initiaux :

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, \rho_e) \quad (22)$$

$$p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, -\rho_e) \quad (23)$$

Pour les quadri-vecteurs finaux, la conservation de l'énergie-impulsion impose que les quatre quadri-vecteurs soient dans un plan. Comme l'état initial définit une direction (l'axe OZ), cette direction et la tri-impulsion $\vec{p}_3$ définissent un plan que l'on peut prendre à $\phi = 0$ où

ϕ est l'angle azimutal, ce choix arbitraire n'a pas d'importance car nous avons une symétrie de rotation autour de l'axe OZ. Nous pouvons donc paramétrer le 4-vecteurs p_3 de la façon suivante :

$$p_3 = (E_3, |\vec{p}_3| \sin \theta, 0, |\vec{p}_3| \cos \theta) \quad (24)$$

Nous pouvons expliciter l'argument de la distribution δ et la section efficace différentielle devient :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \frac{1}{2s\rho_e} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{|\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3|}{2E_3} \delta^+(s - 2\sqrt{s}E_3) |\overline{M}_1|^2 \quad (25)$$

Comme la variable apparaissant dans l'argument de la distribution δ n'est pas la variable d'intégration, nous avons plusieurs solutions pour effectuer l'intégrale sur $|\vec{p}_3|$.

- Soit nous pouvons utiliser la formule

$$\int dx f(x) \delta(g(x)) = \sum_i f(x_i) \frac{1}{|g'(x)|} \Big|_{x=x_i} \quad (26)$$

où les x_i sont les racines de l'équation $g(x) = 0$. Nous avons donc à intégrer quelque chose du type :

$$\int d|\vec{p}_3| f(|\vec{p}_3|) \delta^+ \left(s - 2\sqrt{s} \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_\mu^2} \right) \quad (27)$$

qui donne le résultat suivant :

$$f \left(\sqrt{\frac{s}{4} - m_\mu^2} \right) \frac{1}{4 \sqrt{\frac{s}{4} - m_\mu^2}} \quad (28)$$

- Ou bien faire un changement de variable en remarquant que :

$$E_3 dE_3 = |\vec{p}_3| d|\vec{p}_3| \quad (29)$$

Quelque soit la méthode utilisée, nous obtenons que $E_3 = \sqrt{s}/2$ ou $|\vec{p}_3| = \rho_\mu \sqrt{s}/2$ avec

$$\rho_\mu = \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}}$$

Les composantes du quadri-vecteur p_3 sont donc :

$$p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2} (1, \rho_\mu \sin \theta, 0, \rho_\mu \cos \theta) \quad (30)$$

Il est alors facile de calculer les différents produits scalaire et nous trouvons la formule suivante pour la section efficace différentielle :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \frac{\alpha^2}{4s\rho_e} \rho_\mu (3 - \rho_e^2 - \rho_\mu^2 + \rho_e^2 \rho_\mu^2 \cos^2 \theta) \quad (31)$$

avec $\alpha = e^2/(4\pi)$ la constante de structure fine. A une bonne approximation, $m_e \ll m_\mu$ ($m_\mu = 200 m_e$), c'est à dire $\rho_e \simeq 1$ (car $s > 4m_\mu^2$), nous obtenons alors :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \frac{\alpha^2}{4s} \rho_\mu (2 - \rho_\mu^2 + \rho_\mu^2 \cos^2 \theta) \xrightarrow{s \gg m_\mu^2} \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta) \quad (32)$$

Si nous intégrons sur l'angle solide $d\Omega_3 = d\cos(\theta) d\varphi$, nous obtenons la section efficace totale suivante :

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \rho_\mu \left(1 + \frac{2m_\mu^2}{s}\right) \xrightarrow{s \gg m_\mu^2} \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (33)$$

Nous pouvons comparer les résultats obtenus avec les données expérimentales. Nous prendrons des données à des énergies faibles par rapport à la masse du Z^0 car nous avons omis l'échange d'un boson Z^0 entre les deux lignes fermioniques. Ces données, prises sur internet (hepdata base), viennent d'une expérience réalisée à Novosibirsk (arxiv :0810.0571) qui montre la dépendance de la section efficace intégrée par rapport à l'énergie de l'état initial. Nous obtenons un accord satisfaisant entre les données expérimentales et notre calcul malgré le fait que nous nous sommes limités au premier ordre du développement perturbatif.

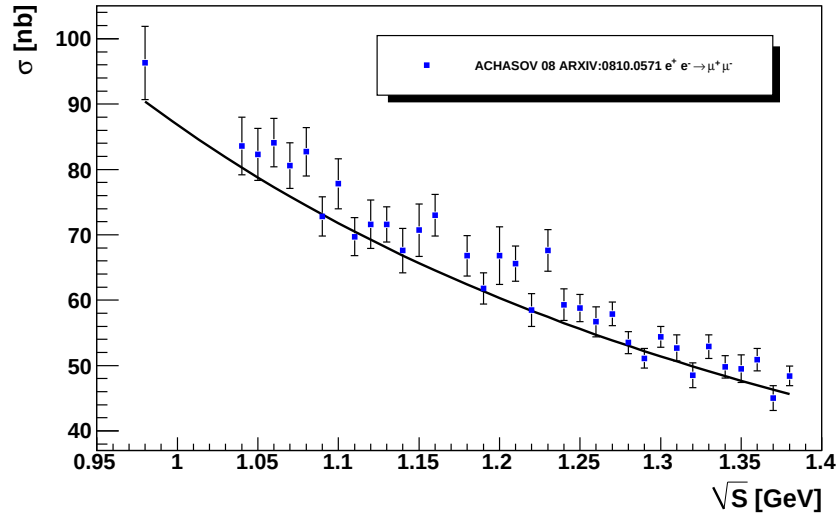
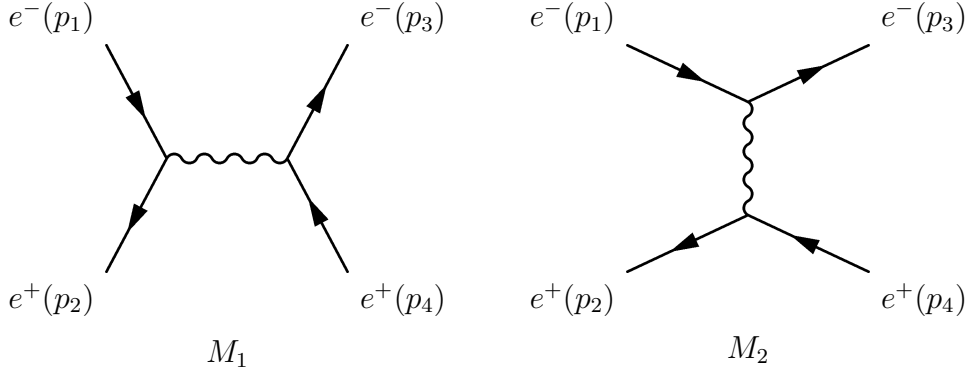


FIGURE 1 – Variation de la section efficace intégrée en fonction de l'énergie disponible $\sqrt{s}$, la courbe théorique est le codage de l'équation (33) (en gardant la dépendance en m_μ et multipliée par $(\hbar c)^2$ pour avoir les bonnes unités)

2 Réaction $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$

Pour compléter, notre "entraînement", c'est un bon exercice de calculer la section efficace de la réaction : $e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + e^+(p_4)$. Dans ce cas deux diagrammes contribuent :



En utilisant les règles de Feynman pour la QED, nous obtenons les expressions suivantes pour les deux amplitudes :

$$M_1 = i e^2 \bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) \frac{1}{k_1^2} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu v(p_4) \quad (34)$$

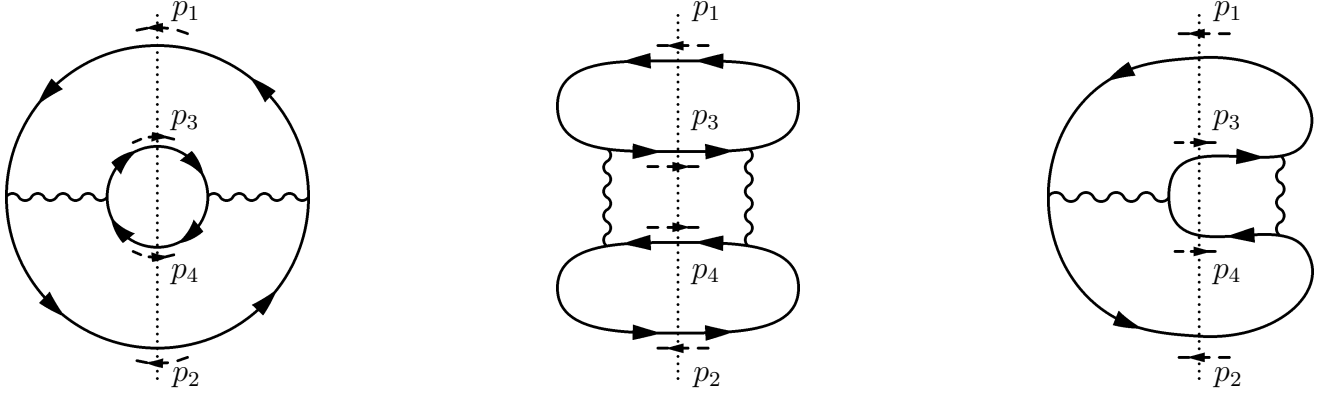
$$M_2 = i e^2 \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \frac{1}{k_2^2} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu v(p_4) \quad (35)$$

avec $k_1 = p_1 + p_2$ et $k_2 = p_1 - p_3$.

Mais ce résultat n'est pas correcte, il y a un signe relatif entre les deux amplitudes et ce signe n'est pas donné par les règles de Feynman. Il provient du fait que pour mettre les opérateurs fermioniques dans l'ordre voulu lors de la contraction de Wick il faut faire un nombre impair de permutations dans l'un ou l'autre cas. Il y a une autre façon de voir cela : lorsque que l'on prend le module carré de l'amplitude, nous avons trois termes. Le carré de M_1 et M_2 comporte deux boucles fermioniques alors que le terme d'interférence n'en comporte qu'une². Si l'on rajoute une nouvelle règle : pour chaque boucle fermionique fermée on multiplie par -1 l'amplitude, alors ce terme d'interférence doit être affecté d'un signe négatif (c.f. chapitre sur les calculs de boucles). Notons que cette règle est justifiée par l'ordonnancement des opérateurs fermioniques lors de la contraction de Wick. Ce type de subtilité apparaît dans les amplitudes contenant des diagrammes reliés entre eux par échange de fermions identiques³.

2. Ce ne sont pas des boucles au sens où on l'entend habituellement, certains propagateurs de ces boucles sont sur couche de masse !

3. Cette notion apparaît plus clairement en considérant la réaction croisée $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$



$|M_1|^2$

$|M_2|^2$

$M_1 M_2^\dagger$

Représentation graphique des différents termes du module carré de l'amplitude totale. Les petites flèches indiquent l'écoulement du flot d'énergie-impulsion

Comme nous l'avons déjà dit :

$$|M_1 + M_2|^2 = |M_1|^2 + |M_2|^2 - 2 \operatorname{Re}(M_1 M_2^\dagger) \quad (36)$$

le signe moins devant le terme d'interférence prend en compte l'extra signe relatif que l'on doit introduire entre M_1 et M_2 .

Un calcul standard à celui fait auparavant, amène à :

$$|M_1|^2 = \frac{e^4}{4k_1^4} \operatorname{Tr}[(\not{p}_2 - m_e)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma_\nu] \operatorname{Tr}[(\not{p}_3 + m_e)\gamma^\mu(\not{p}_4 - m_e)\gamma^\nu] \quad (37)$$

$$|M_2|^2 = \frac{e^4}{4k_2^4} \operatorname{Tr}[(\not{p}_3 + m_e)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma_\nu] \operatorname{Tr}[(\not{p}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{p}_4 - m_e)\gamma^\nu] \quad (38)$$

$$2 \operatorname{Re}(M_1 M_2^\dagger) = \frac{e^4}{2k_1^2 k_2^2} \operatorname{Tr}[(\not{p}_2 - m_e)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma_\nu(\not{p}_3 + m_e)\gamma^\mu(\not{p}_4 - m_e)\gamma^\nu] \quad (39)$$

Notons que les expressions (37), (38) et (39) pourraient être déduites directement de la représentation graphique du module carré de l'amplitude : à chaque propagateur croisant la ligne verticale pointillée doit être associé $2m\Lambda^+$ (respectivement $-2m\Lambda^-$) si le flot de quadri-impulsion est orientée dans le sens (respectivement le sens inverse) du flot fermionique. Les vertex et les propagateurs ne croisant pas la ligne verticale pointillée sont donnés par les règles de Feynman habituelles avec la convention qu'il faut changer tous les facteurs i en $-i$ pour les vertex et propagateurs se trouvant à droite de la ligne verticale pointillée.

Il reste à calculer les traces sur les matrices γ . Les équations (37) et (38) se calculent comme précédemment, pour la dernière équation (39), il faut réduire la chaîne de matrice γ avant d'effectuer la trace et nous trouvons :

$$|M_1|^2 = \frac{8e^4}{k_1^4} ((p_2 \cdot p_3)^2 + (p_1 \cdot p_3)^2 + 2m_e^2 p_1 \cdot p_2 + 2m_e^4) \quad (40)$$

$$|M_2|^2 = \frac{8e^4}{k_2^4} ((p_2 \cdot p_3)^2 + (p_1 \cdot p_2)^2 - 2m_e^2 p_1 \cdot p_3 + 2m_e^4) \quad (41)$$

$$2 \operatorname{Re}(M_1 M_2^\dagger) = \frac{16e^4}{k_1^2 k_2^2} (-(p_2 \cdot p_3)^2 + m_e^2 (p_1 \cdot p_3 - p_1 \cdot p_2 - p_2 \cdot p_3) - m_e^4) \quad (42)$$

Notons que nous avons utilisé la conservation de l'énergie-impulsion $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ pour réduire la taille des termes. Nous pouvons réécrire les équations (40), (41) et (42) en terme des invariants cinématiques suivants :

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = 2m_e^2 + 2p_1 \cdot p_2 \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = 2m_e^2 - 2p_1 \cdot p_3 \\ u &= (p_2 - p_3)^2 = 2m_e^2 - 2p_2 \cdot p_3 \end{aligned}$$

nous avons :

$$|M_1|^2 = \frac{2e^4}{s^2} (u^2 + t^2 + 8m_e^2 s - 8m_e^4) \quad (43)$$

$$|M_2|^2 = \frac{2e^4}{t^2} (u^2 + s^2 + 8m_e^2 t - 8m_e^4) \quad (44)$$

$$2 \operatorname{Re}(M_1 M_2^\dagger) = \frac{4e^4}{s t} (-u^2 + 8m_e^2 u - 12m_e^4) \quad (45)$$

En reprenant les calculs de cinématique fait pour le cas de la réaction $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$, nous obtenons facilement que :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \frac{1}{16s} \frac{1}{(2\pi)^2} |\overline{M_1 + M_2}|^2 \Big|_{|p_3|=\sqrt{s}/2\rho_e} \quad (46)$$

avec :

$$\begin{aligned} t &= -\frac{s}{2} \rho_e^2 (1 - \cos(\theta)) \\ u &= -\frac{s}{2} \rho_e^2 (1 + \cos(\theta)) \end{aligned}$$

Attention ici nous avons une divergence lorsque l'angle polaire de l'électron sortant est égale à zéro : c'est la singularité habituelle dites de Coulomb qui est déjà présente au niveau classique⁴ liée au fait que les particules chargées sont ponctuelles. Au niveau expérimental, ça correspond à regarder les particules diffusées dans l'axe du faisceau. Pour avoir la section efficace intégrée, il faut couper cette région, c'est à dire calculer la quantité :

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d\sigma}{d\Omega_3} \\ \sigma_i &= \frac{\alpha^2 \pi}{2s} \left[(13 - 2\rho_e^2 + \rho_e^4) (c_{max} - c_{min}) \right. \\ &\quad - \rho_e^2 (\rho_e^2 + 1) (c_{max}^2 - c_{min}^2) + \rho_e^4 \frac{(c_{max}^3 - c_{min}^3)}{3} \\ &\quad - \left(\frac{1}{c_{max}} - \frac{1}{c_{min}} \right) \left(4 + \frac{4}{\rho_e^4} + \frac{8}{\rho_e^2} \right) \\ &\quad \left. + (\ln(c_{max}) - \ln(c_{min})) \left(-4 - \frac{14}{\rho_e^2} + 2\rho_e^2 \right) \right] \quad (47) \end{aligned}$$

4. Il faut se rappeler que la transformée de Fourier du potentiel $V(\vec{r}) = e/|\vec{r}|$ est $\tilde{V}(\vec{q}) = \int d^3r e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) = e/|\vec{q}|^2$

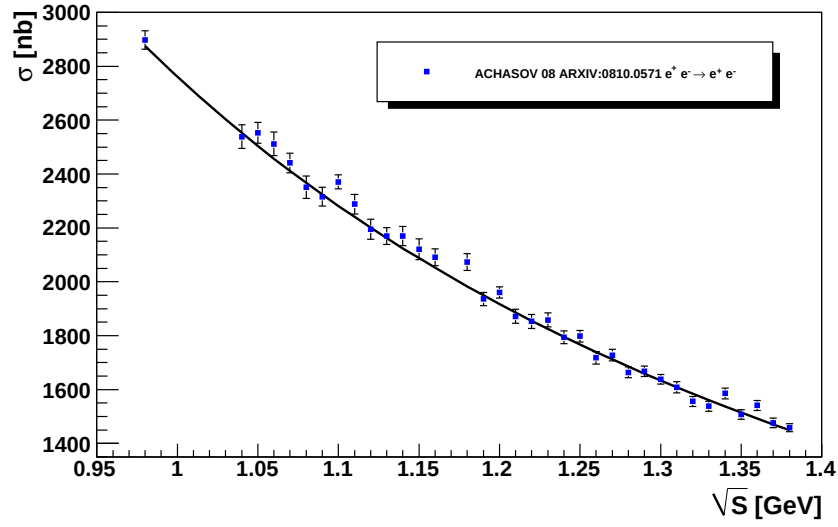


FIGURE 2 – Variation de la section efficace intégrée en fonction de l'énergie disponible $\sqrt{s}$, la courbe théorique est le codage de l'équation (47) intégrée sur $30^0 \leq \theta \leq 150^0$ (ce qui correspond aux conditions expérimentales) et multipliée par $(\hbar c)^2$ pour avoir les bonnes unités

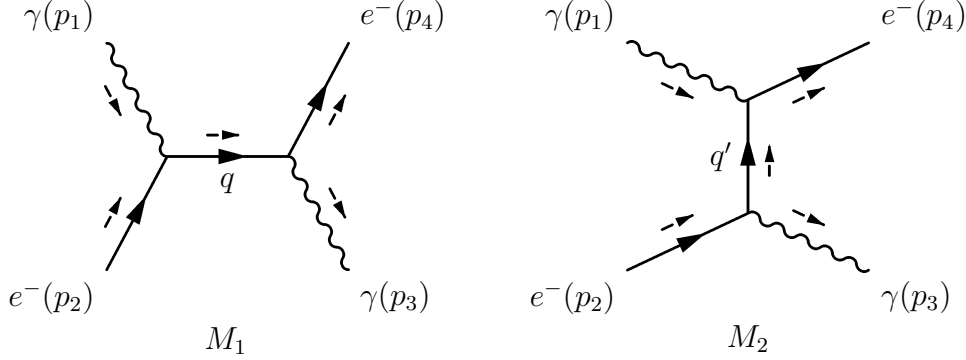
avec

$$\begin{aligned} c_{max} &= 1 - \cos(\theta_{max}) \\ c_{min} &= 1 - \cos(\theta_{min}) \end{aligned}$$

Ici encore nous pouvons comparer les résultats obtenus aux données expérimentales (pris de la même référence) voir figure 2.

3 Réaction $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$

Regardons maintenant l'exemple de la diffusion Compton (réaction $\gamma(p_1) + e^-(p_2) \rightarrow \gamma(p_3) + e^-(p_4)$). Les diagrammes décrivant l'amplitude de cette réaction sont les suivants :



Dans ce cas, nous avons remis les petites flèches indiquant le flux de quadri-impulsion car pour cette réaction, les lignes internes sont des lignes fermioniques. Or le propagateur d'un fermion n'est pas fonction uniquement du carré de la quadri-impulsion du fermion, le choix de l'orientation du flot de quadri-impulsion n'est pas arbitraire, il doit suivre le sens du flot fermionique⁵.

$$M_1 = -i e^2 \bar{u}(p_4) \gamma^{\mu_3} (\not{q} + m) \gamma^{\mu_1} u(p_2) \epsilon_{\mu_1}^{\lambda_1}(p_1) \epsilon_{\mu_3}^{\star \lambda_3}(p_3) \frac{1}{q^2 - m^2 + i \lambda} \quad (48)$$

$$M_2 = -i e^2 \bar{u}(p_4) \gamma^{\mu_1} (\not{q}' + m) \gamma^{\mu_3} u(p_2) \epsilon_{\mu_1}^{\lambda_1}(p_1) \epsilon_{\mu_3}^{\star \lambda_3}(p_3) \frac{1}{q'^2 - m^2 + i \lambda} \quad (49)$$

avec $q = p_1 + p_2$, c'est à dire $q^2 - m^2 = 2 p_1 \cdot p_2 \neq 0$ et $q' = p_2 - p_3$ c'est à dire $q'^2 - m^2 = -2 p_2 \cdot p_3 \neq 0$. On peut donc envoyer la petite partie imaginaire à zéro à ce niveau. Les équations (48) et (49) peuvent se réécrire :

$$M_1 = -i e^2 \frac{\bar{u}(p_4) \gamma^{\mu_3} (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^{\mu_1} u(p_2)}{2 p_1 \cdot p_2} \epsilon_{\mu_1}^{\lambda_1}(p_1) \epsilon_{\mu_3}^{\star \lambda_3}(p_3) \quad (50)$$

$$M_2 = -i e^2 \frac{\bar{u}(p_4) \gamma^{\mu_1} (\not{p}_2 - \not{p}_3 + m) \gamma^{\mu_3} u(p_2)}{-2 p_2 \cdot p_3} \epsilon_{\mu_1}^{\lambda_1}(p_1) \epsilon_{\mu_3}^{\star \lambda_3}(p_3) \quad (51)$$

Nous voyons donc que les amplitudes M_1 et M_2 sont transformées l'une en l'autre en changeant p_1 en $-p_3$ et $\epsilon(p_1)$ en $\epsilon^*(p_3)$.

Avant de faire le calcul du carré des amplitudes, nous allons étudier certaines propriétés de leur somme. Définissons $M_T = M_1 + M_2$ et $M_T = M_T^{\mu_1 \mu_3} \epsilon_{\mu_1}^{\lambda_1}(p_1) \epsilon_{\mu_3}^{\star \lambda_3}(p_3)$. D'après les équations

5. Si l'on prend le flot de quadri-impulsion dans le sens opposé au flot fermionique, on doit considérer le propagateur d'un anti-fermion : $i(-\not{p} + m)/(p^2 - m^2 + i \lambda)$

(50) et (51), nous avons que :

$$M_T^{\mu_1 \mu_3} = (-i e^2) \left[\frac{\bar{u}(p_4) \gamma^{\mu_3} (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^{\mu_1} u(p_2)}{2 p_1 \cdot p_2} - \frac{\bar{u}(p_4) \gamma^{\mu_1} (\not{p}_2 - \not{p}_3 + m) \gamma^{\mu_3} u(p_2)}{2 p_2 \cdot p_3} \right] \quad (52)$$

Nous allons maintenant calculer les quantités $p_{1\mu_1} M_T^{\mu_1 \mu_3}$ et $p_{3\mu_3} M_T^{\mu_1 \mu_3}$. Pour cela remarquons que :

$$\begin{aligned} (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \not{p}_1 u(p_2) &= (\not{p}_2 + m) \not{p}_1 u(p_2) \\ &= (2 p_1 \cdot p_2 - \not{p}_1 \not{p}_2 + \not{p}_1 m) u(p_2) \\ &= 2 p_1 \cdot p_2 u(p_2) - \not{p}_1 (\not{p}_2 - m) u(p_2) \\ &= 2 p_1 \cdot p_2 u(p_2) \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_4) \not{p}_1 (\not{p}_2 - \not{p}_3 + m) &= \bar{u}(p_4) \not{p}_1 (\not{p}_4 - \not{p}_1 + m) \\ &= \bar{u}(p_4) \not{p}_1 (\not{p}_4 + m) \\ &= \bar{u}(p_4) (2 p_1 \cdot p_4 - \not{p}_4 \not{p}_1 + \not{p}_1 m) \\ &= 2 p_1 \cdot p_4 \bar{u}(p_4) - \bar{u}(p_4) (\not{p}_4 - m) \not{p}_1 \\ &= 2 p_1 \cdot p_4 \bar{u}(p_4) \\ &= 2 p_2 \cdot p_3 \bar{u}(p_4) \end{aligned}$$

d'où :

$$p_{1\mu_1} M_T^{\mu_1 \mu_3} = (-i e^2) [\bar{u}(p_4) \gamma^{\mu_3} u(p_2) - \bar{u}(p_4) \gamma^{\mu_3} u(p_2)] = 0 \quad (53)$$

Avec les mêmes types de calcul, nous pouvons montrer que :

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_4) \not{p}_3 (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) &= 2 p_1 \cdot p_2 \bar{u}(p_4) \\ (\not{p}_2 - \not{p}_3 + m) \not{p}_3 u(p_2) &= 2 p_2 \cdot p_3 u(p_2) \end{aligned}$$

et donc que :

$$p_{3\mu_3} M_T^{\mu_1 \mu_3} = (-i e^2) [\bar{u}(p_4) \gamma^{\mu_3} u(p_2) - \bar{u}(p_4) \gamma^{\mu_3} u(p_2)] = 0 \quad (54)$$

Notons que $p_{1\mu_1} M_T^{\mu_1 \mu_3} = 0$ (resp. $p_{3\mu_3} M_T^{\mu_1 \mu_3} = 0$) même si $p_1^2 \neq 0$ (resp. $p_3^2 \neq 0$). En effet, dans ce cas, nous aurions, par exemple, $(\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \not{p}_1 u(p_2) = (p_1^2 + 2 p_1 \cdot p_2) u(p_2)$ (resp. $\bar{u}(p_4) \not{p}_1 (\not{p}_2 - \not{p}_3 + m) = (2 p_1 \cdot p_4 - p_1^2) \bar{u}(p_4)$) mais le dénominateur serait alors $p_1^2 + 2 p_1 \cdot p_2$ (resp. $p_1^2 - 2 p_1 \cdot p_4$). Ceci est particulier à une théorie de jauge Abélienne comme QED mais ne sera plus vrai en QCD.

Les relations (53) et (54) sont liées à la symétrie de jauge, elles font partie d'une série de relations entre les amplitudes (ou les fonctions de Green) qui s'appelle les identités de Ward.

La section efficace différentielle, dans le cas où nous nous intéressons pas à la polarisation, est donnée par :

$$d\sigma = \frac{1}{4 p_1 \cdot p_2} \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3}{2 E_3} \frac{d^3 p_4}{2 E_4} |\overline{M}_T|^2 \quad (55)$$

où $|\overline{M}_T|^2$ représente le module carré de l'amplitude totale moyennée sur les polarisations initiales et sommée sur les polarisations finales. Nous éliminons la contrainte sur la conservation de l'énergie-impulsion par une intégration sur p_4 et nous obtenons :

$$d\sigma = \frac{1}{4 p_1 \cdot p_2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3 p_3}{2 E_3} \delta^+(p_4^2 - m^2) |\overline{M}_T|^2 \quad (56)$$

Faisons un peu de cinématique, pour modifier l'argument de la distribution de Dirac. Pour cela, nous pouvons partir de :

$$p_4^2 = (p_1 + p_2 - p_3)^2$$

en développant le membre de droite, nous avons :

$$p_4^2 = m^2 + 2 p_1 \cdot p_2 - 2 p_1 \cdot p_3 - 2 p_2 \cdot p_3$$

La section efficace différentielle devient donc :

$$d\sigma = \frac{1}{4 p_1 \cdot p_2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3 p_3}{2 E_3} \delta^+(2 p_1 \cdot p_2 - 2 p_1 \cdot p_3 - 2 p_2 \cdot p_3) |\overline{M}_T|^2 \quad (57)$$

Calculons dans un premier temps le module carré de l'amplitude totale, c'est à dire que nous devons calculer :

$$\begin{aligned} |\overline{M}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda_1} \epsilon_{\mu_1}^{\lambda_1}(p_1) \epsilon_{\nu_1}^{\star \lambda_1}(p_1) \sum_{\lambda_3} \epsilon_{\mu_3}^{\star \lambda_3}(p_3) \epsilon_{\nu_3}^{\lambda_3}(p_3) \\ &\quad \times \sum_{l_2, l_4} M_T^{\mu_1 \mu_3} M_T^{\dagger \nu_1 \nu_3} \end{aligned} \quad (58)$$

avec

$$M_T^{\mu_1 \mu_3} M_T^{\dagger \nu_1 \nu_3} = M_1^{\mu_1 \mu_3} M_1^{\dagger \nu_1 \nu_3} + M_2^{\mu_1 \mu_3} M_2^{\dagger \nu_1 \nu_3} + 2 \operatorname{Re}(M_1^{\mu_1 \mu_3} M_2^{\dagger \nu_1 \nu_3})$$

Construisons maintenant le projecteur sur les polarisations physiques (transverses) $\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{\mu}^{\lambda}(k) \epsilon_{\nu}^{\star \lambda}(k)$. Pour cela, nous choisissons un quadri-vecteur p de type temps ($p^2 = m^2$) qui soit aussi perpendiculaire aux vecteurs de polarisation transverses :

$$k \cdot \epsilon^{\lambda} = p \cdot \epsilon^{\lambda} = 0 \quad \text{pour } \lambda = 1, 2$$

Nous voulons construire un quadri-vecteur de genre espace $\epsilon^3(k)$ qui ait les propriétés suivantes :

$$(\epsilon^3(k))^2 = -1 \quad (59)$$

$$\epsilon^3(k) \cdot \epsilon^{\lambda}(k) = 0 \quad (60)$$

$$p \cdot \epsilon^3(k) = 0 \quad (61)$$

nous recherchons $\epsilon^3(k)$ sous la forme d'une combinaison linéaire de p et k : $\epsilon^3(k) = A p + B k$. La contrainte (60) est toujours vérifiée car par construction p et k sont perpendiculaires aux $\epsilon^{\lambda}(k)$. Les contraintes (59) et (61) donnent le système d'équations suivant pour A et B :

$$\begin{aligned} A p^2 + B p \cdot k &= 0 \\ A^2 p^2 + 2 A B p \cdot k &= -1 \end{aligned}$$

qui a pour solution :

$$\begin{aligned} A &= \pm \frac{1}{m} \\ B &= \mp \frac{m}{p.k} \end{aligned}$$

Les quadri-vecteurs suivant forment une base de l'espace de Minkowski :

$$\epsilon^0(k) = \frac{p}{m}, \quad \epsilon^{\lambda=1,2}(k), \quad \epsilon^3(k) = \pm \frac{p}{m} \mp \frac{m.k}{p.k}$$

il est facile de voir que ces quadri-vecteurs sont orthogonaux entre eux et qu'ils sont de carré ± 1 .

Ceci donne la relation de fermeture suivante :

$$g_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=0}^3 g_{\lambda\lambda} \epsilon_{\mu}^{\lambda}(k) \epsilon_{\nu}^{\lambda}(k) \quad (62)$$

Si on a une base de l'espace de Minkowski A^0, A^1, A^2 et A^3 telle que

$$A^i.A^j = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad \text{et} \quad A^{i2} = \pm 1$$

alors, on peut écrire une relation de fermeture :

$$g_{\mu\nu} = \sum_i h_i A_{\mu}^i A_{\nu}^i \quad (63)$$

où $h_i = \text{signe}(A^{i2})$. En effet, soit C_{μ} et D_{μ} deux quadri-vecteurs arbitraires dont les composantes sont $C = \sum_k c_k A^k$ et $D = \sum_l d_l A^l$, alors si on contracte les membres de droite et de gauche de l'équation (63) par $C^{\mu} D_{\nu}$, on obtient :

$$\sum_i c_i d_i A^{i2} = \sum_i h_i c_i d_i A^{i2} A^{i2}$$

L'égalité est vérifiée car $h_i A_i^2 = 1$ quelque soit i . Cette égalité est vrai quelque soit les quadri-vecteurs C et D donc cela prouve la relation de fermeture (63). Cette relation est bien compatible avec le rôle de $g_{\mu\nu}$ qui est de monter et descendre les indices :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} C^{\mu} &= \sum_i \sum_k h_i c_k A^i.A^k A_{\nu}^i \\ &= \sum_i h_i^2 c_i A_{\nu}^i \\ &= C_{\nu} \end{aligned}$$

Si nous explicitons dans la somme sur λ , les composantes $\lambda = 0$ et $\lambda = 3$, alors nous pouvons écrire :

$$\sum_{\lambda=1,2} \epsilon_{\mu}^{\lambda}(k) \epsilon_{\nu}^{\lambda}(k) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu} k_{\nu} + p_{\nu} k_{\mu}}{p.k} - \frac{m^2}{(p.k)^2} k_{\mu} k_{\nu} \quad (64)$$

Pour obtenir le résultat escompté, il faut supposé que les ϵ^λ sont réels, c'est le cas si les photons sont polarisés linéairement. Mais ceci n'a pas beaucoup d'importance étant donné que l'on somme sur les états de polarisations, il suffit de trouver une base complète d'états polarisés.

Donc, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda_1} \epsilon_{\mu_1}^{\lambda_1}(p_1) \epsilon_{\nu_1}^{\star \lambda_1}(p_1) &= -g_{\mu_1 \nu_1} + \dots \\ \sum_{\lambda_3} \epsilon_{\mu_3}^{\star \lambda_3}(p_3) \epsilon_{\nu_3}^{\lambda_3}(p_3) &= -g_{\mu_3 \nu_3} + \dots\end{aligned}$$

Les $\dots$ représentent des termes qui vont donner 0 à cause des identités de Ward.

On va réécrire M_1 et M_2 pour les mettre sous une forme plus facile pour le calcul du carré de l'élément de matrice :

$$M_1^{\mu_1 \mu_3} = \frac{-i e^2}{2 p_1 \cdot p_2} (\bar{u}(p_4) \gamma^{\mu_3} \not{p}_1 \gamma^{\mu_1} u(p_2) + 2 p_2^{\mu_1} \bar{u}(p_4) \gamma^{\mu_3} u(p_2)) \quad (65)$$

$$M_2^{\mu_1 \mu_3} = \frac{-i e^2}{-2 p_2 \cdot p_3} (-\bar{u}(p_4) \gamma^{\mu_1} \not{p}_3 \gamma^{\mu_3} u(p_2) + 2 p_3^{\mu_3} \bar{u}(p_4) \gamma^{\mu_1} u(p_2)) \quad (66)$$

Un calcul un peu long mais trivial qui utilise le fait que $p_4 = p_1 + p_2 - p_3$, nous amène aux résultats suivant :

$$\sum_{l_2, l_4} g_{\mu_1 \nu_1} g_{\mu_3 \nu_3} M_1^{\mu_1 \mu_3} M_1^{\dagger \nu_1 \nu_3} = \frac{4 e^4}{(p_1 \cdot p_2)^2} (2 p_2 \cdot p_3 p_1 \cdot p_2 + 2 m^2 p_1 \cdot p_2 + 2 m^4) \quad (67)$$

pour $\sum_{l_2, l_4} g_{\mu_1 \nu_1} g_{\mu_3 \nu_3} M_2^{\mu_1 \mu_3} M_2^{\dagger \nu_1 \nu_3}$, nous pouvons prendre le résultat de l'équation (67) en changeant $p_1 \leftrightarrow -p_3$ (l'échange $\epsilon(p_1) \leftrightarrow \epsilon^\star(p_3)$ ne joue plus aucun rôle ici), nous obtenons donc :

$$\sum_{l_2, l_4} g_{\mu_1 \nu_1} g_{\mu_3 \nu_3} M_2^{\mu_1 \mu_3} M_2^{\dagger \nu_1 \nu_3} = \frac{4 e^4}{(p_2 \cdot p_3)^2} (2 p_2 \cdot p_3 p_1 \cdot p_2 - 2 m^2 p_2 \cdot p_3 + 2 m^4) \quad (68)$$

et enfin :

$$\sum_{l_2, l_4} g_{\mu_1 \nu_1} g_{\mu_3 \nu_3} M_1^{\mu_1 \mu_3} M_2^{\dagger \nu_1 \nu_3} = \frac{4 e^4}{p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3} m^2 (p_2 \cdot p_3 - p_1 \cdot p_2 - 2 m^2) \quad (69)$$

En regroupant ces différents résultats et en utilisant la contrainte restante à savoir que $p_1 \cdot p_2 - p_2 \cdot p_3 = p_1 \cdot p_3$, nous trouvons que le carré de l'amplitude M_T est donné par :

$$|\overline{M_T}|^2 = 2 e^4 \left[\frac{p_2 \cdot p_3}{p_1 \cdot p_2} + \frac{p_1 \cdot p_2}{p_2 \cdot p_3} - \frac{2 m^2 p_1 \cdot p_3}{p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_3} + \frac{m^4 (p_1 \cdot p_3)^2}{(p_1 \cdot p_2)^2 (p_2 \cdot p_3)^2} \right] \quad (70)$$

Nous nous plaçons dans le repère du laboratoire où l'électron est au repos (car il n'y a pas de collisionneur $e \gamma$). Dans ce repère, les différents quadri-vecteurs s'écrivent :

$$p_2 = m (1, 0, 0, 0) \quad p_1 = E_1 (1, 0, 0, 1) \quad p_3 = E_3 (1, \sin(\theta), 0, \cos(\theta))$$

le carré de l'amplitude totale devient :

$$|\overline{M}_T|^2 = 2 e^4 \left[\frac{E_3}{E_1} + \frac{E_1}{E_3} - \sin^2(\theta) \right] \quad (71)$$

et l'équation (57) se simplifie en :

$$d\sigma = \frac{1}{4 E_1 m} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} E_3 dE_3 d\Omega_3 \delta^+(2(E_1 m - E_1 E_3 (1 - \cos(\theta)) - E_3 m)) |\overline{M}_T|^2 \quad (72)$$

L'intégrale sur E_3 est donc du type :

$$\int dE_3 f(E_3) \delta^+(B - A E_3) = \frac{1}{A} f\left(\frac{B}{A}\right)$$

et la section efficace différentielle devient :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \frac{1}{16} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(m + (1 - \cos(\theta)) E_1)^2} |\overline{M}_T|^2 \Big|_{E_3 = E_1 m / (m + (1 - \cos(\theta)) E_1)} \quad (73)$$

ou

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \frac{\alpha^2}{2 m^2} \left(\frac{E_3}{E_1} \right)^2 \left[\frac{E_3}{E_1} + \frac{E_1}{E_3} - \sin^2(\theta) \right] \quad (74)$$

De manière général, cette formule supporte le caractère corpusculaire de la lumière : les grains de lumière (les photons) ont une énergie proportionnelle à la fréquence de l'onde ($E = h\nu$). Ainsi, si l'on fait diffuser une onde électromagnétique de longueur d'onde λ_1 ($E_1 = 1/\lambda_1$) sur un électron, l'équation (74) montre que l'énergie du photon sortant est inférieure à l'énergie du photon initial et donc que l'onde diffusée aura une longueur d'onde λ_3 plus grande que l'onde initiale⁶.

Mais pour les expériences qui sont faites en étudiant la diffusion d'un faisceau laser sur une cible d'électron, nous avons typiquement que $E_1 \sim 1$ eV alors que $m \sim 1$ MeV. Dans ce cas, nous pouvons négliger le terme en $(1 - \cos \theta) E_1$ devant m au dénominateur de la formule donnant E_3 en fonction de E_1 et nous obtenons que $E_3 \simeq E_1$. Nous retrouvons donc la formule de Thomson :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \frac{\alpha^2}{2 m^2} (1 + \cos^2(\theta)) \quad (75)$$

ou après intégration sur l'angle solide du photon final :

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m^2} \quad (76)$$

Cette réaction est importante car elle fournit un moyen de mesurer précisément α .

6. Une théorie purement ondulatoire de la lumière ne pourrait pas rendre compte d'un tel phénomène car l'énergie de l'onde est indépendante de sa longueur d'onde.